https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Е.И. КУРКИН, Е.А. КИШОВ*

# АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 24.03.04 Авиастроение и специальности 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение

САМАРА
Издательство Самарского университета
2023

Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

УДК 629.7.01(075)+004.925.8(075)
ББК О52-02я7+Ж2-5-05я7
К932

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. Д.С. Вдовин,
д-р техн. наук, доц. Я.А. Ерисов

***Куркин, Евгений Игоревич***

К932 **Автоматизация проектирования авиационных конструкций на основе компьютерного моделирования**: учебное пособие / *Е.И. Куркин, Е.А. Кишов.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 128 с.

**ISBN 978-5-7883-1966-7**

Данное учебное пособие направлено на получение обучающимися по направлению подготовки 24.03.04 Авиастроение и специальности 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение базовых знаний, умений и навыков в области компьютерного моделирования авиационных конструкций на основе современных CAE систем. Структура учебного пособия и излагаемый в нём материал подобран с учётом опыта инженерной практики построения компьютерных моделей аэрокосмических конструкций из металлов и композиционных материалов.

Предназначено для обучающихся по специальности 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение и направлению подготовки 24.03.04 Авиастроение.

Подготовлено на кафедре конструкции и проектирования летательных аппаратов.

УДК 629.7.01(075)+004.925.8(075)
ББК О52-02я7+Ж2-5-05я7

ISBN 978-5-7883-1966-7 © Самарский университет, 2023

Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ..... 4

1 Математическое моделирование с использованием технологий компьютерного инжиниринга ..... 5

2 Проектирование с использованием CAE-систем. Основы метода конечных элементов ..... 15

3 Геометрическая модель конструкции. Построение сетки конечных элементов ..... 28

4 Расчет на прочность в CAE-системах. Граничные условия прочностных расчетов: закрепление и нагружение ..... 40

5 Использование системы ANSYS для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций ..... 54

6 Расчёт конструкций их слоистых композиционных материалов ..... 66

7 Использование системы FEMAP/NASTRAN для расчёта конструкций из слоистых композиционных материалов ..... 77

8 Топологическая оптимизация конструкций ..... 85

9 Параметрическая оптимизация конструкций ..... 109

Библиографический список ..... 125



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# ВВЕДЕНИЕ

Цель учебного пособия – помочь студентам в изучении методов автоматизированного проектирования авиационных конструкций с использованием современных CAE-систем.

Математическое моделирование в инженерной деятельности преследует простую цель – сократить материальные и временные затраты на этапе создания новой техники. Разрабатывать и производить летательные аппараты, автомобили, строительные сооружения и т.п. можно и без привлечения расчётных методов, основываясь лишь на инженерном «чутье». Однако такой подход чреват большим количеством «проб и ошибок», что в случае наукоёмких дорогостоящих производств приводит к неоправданно большим затратам средств.

Методология автоматизации рабочих процессов авиастроительного предприятия в контексте создания новых решений в области силового конструирования рассмотрена в пособии [1], в котором даются основы сквозного использования конечно-элементного анализа и методов оптимизации. Настоящее пособие развивает идеи, предложенные в пособии [1], в части проектирования несущих конструкций на основе всеобъемлющего компьютерного инжиниринга в более широком ключе, охватывая конкретные вопросы расчёта и оптимизации как отдельных деталей и узлов, так и конструкций из слоистых композиционных материалов.

В рамках данного пособия сделан акцент на вопросах математического моделирования, возникающих при работе в CAE-системах, а именно в области механики конструкций (статической прочности), аэродинамики и оптимизации.



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ КОМПЬЮТЕРНОГО ИНЖИНИРИНГА

*Компьютерный инжиниринг. Разновидности математических моделей. Основные этапы математического моделирования. Источники погрешностей.*

Современное наукоёмкое производство прочно базируется на технологиях компьютерного инжиниринга (рисунок 1.1).

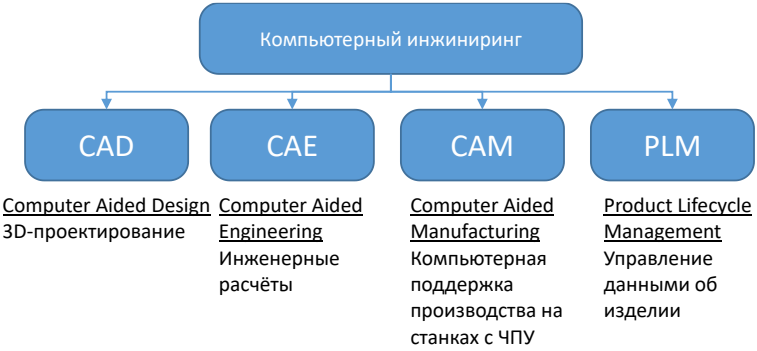



Рисунок 1.1 – Разновидности программных систем компьютерного инжиниринга

Существуют следующие разновидности программных систем компьютерного инжиниринга:

1) CAD-системы: программы для геометрического моделирования, такие как Компас-3D, Siemens NX, CATIA и т.п.;

2) CAE-системы: программы для проведения инженерных расчётов на основе численного решения уравнений математической



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

физики (дифференциальных уравнений в частных производных), такие как Ansys, Nastran, Abaqus и т.п. Также сюда можно отнести программы инженерных расчётов на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, такие как Siemens Amesim, Ansys Twin-Builder и т.п.;

3) CAM-системы: программы для формирования управляющих кодов для станков с ЧПУ, такие как Siemens NX (CAM), ArtCAM и т.п.;

4) PLM-системы: программы для управления данными об изделии, такие как PTC Windchill, Siemens Teamcenter и т.п.

Простейшим примером использования математических методов в инжиниринге являются так называемые проектировочные расчёты – простые формулы, вычислительная сложность которых не превышает возможностей обычного калькулятора или в крайнем случае Excel, но позволяющие быстро оценить, например, размеры поперечных сечений несущих элементов конструкции будущего самолёта. Известное правило для вычисления потребной площади поперечного сечения стержня как отношения действующей силы к допускаемому напряжению – относится как раз к этой категории. Без применения даже таких простых математических (если не сказать – арифметических) методов пришлось бы для каждого конструктивного элемента проводить натурные испытания – масштаб материальных затрат при этом не нуждается в комментариях.

В современной практике на этапе проектировочных расчётов задействуют упрощённые или «облегчённые» математические модели, допускающие возможность быстрого перебора вариантов конструкции. Зачастую привлекаются методы оптимизации.

Другая категория – так называемые поверочные расчёты. Они выполняются на относительно «тяжёлых» в вычислительном смысле и подробных моделях изделия. В каком-то смысле поверочные расчёты являются виртуальным аналогом натурных испытаний


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

и нередко требуют использования высокопроизводительных вычислительных мощностей (суперкомпьютеры, расчёты на GPU и т.п.).

Говоря о разновидностях математических моделей, следует отметить две категории: первые базируются на обыкновенных дифференциальных уравнениях и их иногда называют условно «1D»-моделями, вторые – на уравнениях в частных производных, и их относят к «3D»-моделям. Такое обозначение, по-видимому, обусловлено тем, что в «1D»-моделях рассматриваются как правило нестационарные процессы, описываемые набором функций от одной переменной (времени), а в «3D»-моделях речь идёт о нахождении распределения той или иной физической величины и по пространству и, в общем случае, по времени. Для «1D»-модели как правило достаточно построения принципиальной схемы исследуемой системы, например, гидравлической или электрической (рисунок 1.2).

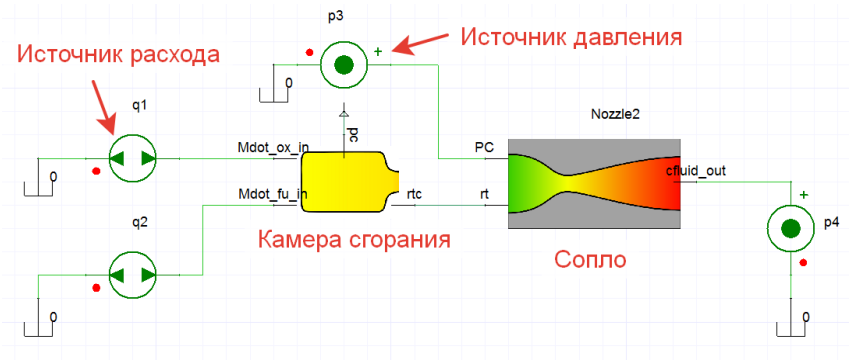



Рисунок 1.2 – Пример «1D»-модели: схема ЖРД, построенная в Ansys Simplorer (ныне Ansys TwinBuilder)

«3D»-модель требует построения той или иной дискретной аппроксимации (сетка, частицы и т.п.), распределённой в пространстве. Соответственно, результаты такой модели получаются в виде пространственного распределения искомых физических величин (рисунок 1.3).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

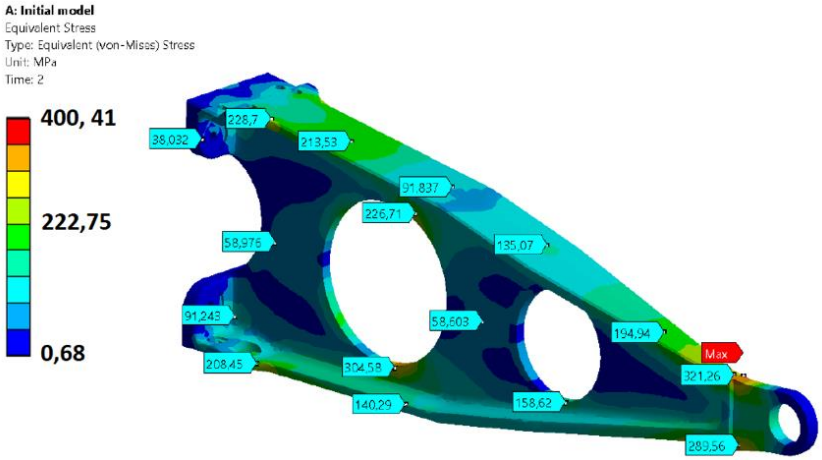



Рисунок 1.3 – Пример «3D»-модели: пространственное распределение эквивалентных напряжений по объёму кронштейна

Рассмотрим этапы математического моделирования, взяв для конкретики проведение поверочного расчёта прочности конструкций.

1) *Оценка сложности задачи и подбор инструментария для её решения.*

Если требуется рассчитать на статическую прочность консольную балку, выполненную из некоторого металлического сплава и работающую в типовых, неэкстремальных условиях – достаточно методов и средств курса по сопротивлению материалов. Если объект расчёта – крыло самолёта обратной стреловидности с анизотропной композиционной обшивкой – то стоит прибегнуть к специализированным программным комплексам.

2) *Анализ исходных данных*

В качестве исходных данных для прочностного расчёта как правило выступают:

– свойства материала;



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

– геометрическая модель конструкции. Если геометрия представлена набором поверхностей или линий, то эта информация дополняется сведениями о размерах поперечных сечений;

– условия (случаи) нагружения и закрепления.

Анализ исходных данных проводится с целью оценки их полноты и достоверности. К примеру, требуется рассчитать на прочность и герметичность корпус с крышкой и резиновыми уплотнениями, нагруженный внутренним давлением. Если при этом со стороны заказчика не поступает обнадёживающей информации о специфических механических свойствах материала уплотнений (которые зачастую отличаются гиперупругим характером), то расчётчику необходимо либо найти эти свойства самостоятельно и согласовать их с заказчиком, либо исключить из работы пункт об оценке герметичности, оставив лишь прочность.

В отношении полноты геометрической информации о конструкции – иногда может потребоваться дополнительно «окружающая обстановка», т.е. сборочные единицы, расположенные в непосредственном контакте с рассчитываемым объектом. Такая ситуация возникает, в частности, в случае, когда из особенностей работы конструкции становится очевидной невозможность пренебрежения податливостью опор.

3) *Работа с геометрической моделью*

На данном этапе происходит подготовка конструкторской геометрии для построения расчётной модели. Зачастую, исходные сборки имеют пересечения или зазоры, которые могут неблагоприятно сказаться на качестве результата. Кроме того, несущественные с точки зрения прочности элементы геометрии также подлежат удалению (например, гравировка).

4) *Построение расчётной модели и наложение граничных условий*

Построение расчётной сетки. Задание нагрузок и закреплений. На этом этапе полезно проведение специального вычислительного



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

эксперимента – исследование сеточной сходимости. Суть его в проведении серии расчётов с различным размером элементов расчётной сетки и построении зависимости исследуемых величин от этого размера. На основе этой зависимости можно определить рациональный размер элемента: когда сгущение сетки не приводит к существенному увеличению точности (рисунок 1.4).

Однако на этом пути есть «подводные камни» в виде проблемы сингулярности – неограниченного роста напряжений в окрестности концентраторов напряжений. Но это предмет для отдельного рассмотрения.




Рисунок 1.4 – Исследование сеточной сходимости на примере оценки уровня максимальных напряжений в исследуемой зоне конструкции

5) *Расчёт*

При расчёте сложных сборок со множеством контактных взаимодействий, на первом этапе рекомендуется умышленно упростить модель с целью исключения грубых ошибок. Например, для всех контактов можно установить тип «неразъёмного», а материалы сделать линейно-упругими. Если упрощённый расчёт завершается успешно – то можно постепенно включать в модель «усложняющие факторы» в виде нелинейностей и т.п.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

6) *Анализ результатов*

Простейший способ проверить корректность прочностного расчёта – посмотреть картину деформированного состояния. Полезно также провести оценку порядка величин напряжений в характерных точках конструкции вручную по формулам сопротивления материалов или строительной механики и сравнить их со значениями, полученными на численной модели. Проверить правильность приложения нагрузок и оценить равновесие модели можно при помощи вывода реакций в опорах.

Изложенные выше этапы относятся к случаю, когда решается типовая задача – и вычислительный алгоритм реализован в имеющемся специализированном ПО. Более творческой является ситуация, когда требуется решить нестандартную задачу, для которой нет готового инструмента. Тогда приходится разрабатывать программу самостоятельно либо в виде дополнительного модуля к существующему ПО (кастомизация), либо в виде отдельного приложения.

Рассмотрим источники погрешностей и ошибки, возникающих в процессе математического моделирования.

*Погрешность метода*

Наибольшее распространение в среде инженеров-расчётчиков, работающих в области механики конструкций и аэродинамики получили методы конечных элементов и контрольных объёмов, используемые десятилетиями для решения промышленных задач. Однако в специализированных областях, таких как, например, моделирование технологического процесса резания металлов или объёмной штамповки (рисунок 1.5) или моделирование пробития брони снарядом (рисунок 1.6), в ход идут другие методы, в частности, EFG (Element Free Galerkin, бессеточный метод Галеркина) и SPH (Smooth Particle Hidrodynamics, гидродинамика сглаженных частиц).

Дело в том, что точность решения в сеточном методе (и в МКЭ как типичном представителе этого класса) сильно зависит от качества формы элементов. В результате больших деформаций, сопро-


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

вождающих процессы пластического деформирования и разрушения металла, элементы могут претерпевать значительные искажения формы, становясь сильно вытянутыми или скошенными. В этом случае требуется либо специальные процедуры перестроения сетки (т.н. «ремешинг»), либо вовсе отказ от сетки как таковой и переход к бессеточному методу.

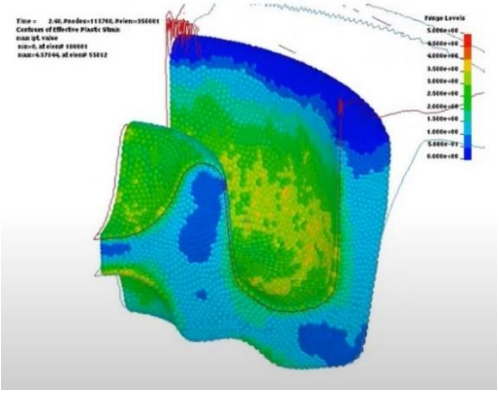


Рисунок 1.5 – Расчёт объёмной штамповки методом EFG в Ansys LS-DYNA [2]

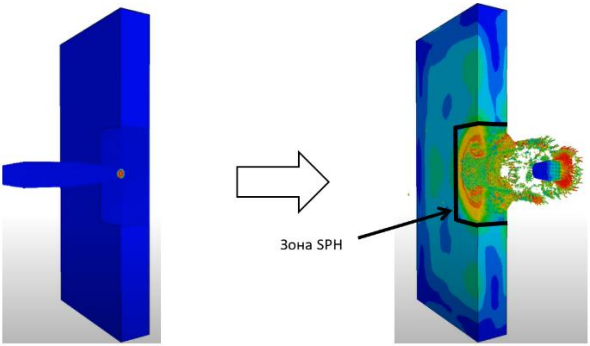



Рисунок 1.6 – Моделирование пробития брони снарядом в Ansys LS-DYNA с использованием метода SPH [3]


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Погрешность модели*

Наиболее распространённый тип погрешности – не вполне корректно построенная расчётная модель. Это может быть, например, ошибочное использование классической теории изгиба для коротких тонкостенных балок или слишком грубая сеточная модель. Сюда же следует отнести применение жёсткого клеевого контакта для контактирующих деталей, когда из принципа работы конструкции допускается их отхождение друг от друга.

*Человеческий фактор*

Сюда относятся в первую очередь ошибки из-за невнимательности человека, работающего в диалоговом режиме с компьютером: попросту говоря, опечатки при вводе исходных данных. Кроме этого, нередки и порой не всегда очевидны проблемы, связанные с некорректным выбором системы единиц измерения. Например, при расчёте конструкции на нагрузку от инерционных сил (сила тяжести, перегрузка и т.п.) или при проведении любого динамического расчёта, включая анализ собственных частот колебаний, пользователь может, что называется, «не глядя» выбрать систему «мм-Н-кг», в которой плотность задаётся в кг/мм$^3$. Тогда как правильной и согласованной системой единиц измерения является «мм-Н-т», то есть плотность должна задаваться в тоннах на кубический миллиметр.

Подытоживая раздел, посвящённый погрешностям, следует отметить, что список возможных ошибок при математическом моделировании сложных систем вряд ли уложится в какой бы то ни было документ приемлемого объёма. Поэтому расчётчику следует прежде всего следовать принципу: «посчитал – проверь, а потом ещё раз проверь».

### *Контрольные вопросы*

1. Назовите четыре ключевые категории программных систем компьютерного инжиниринга. Приведите примеры в каждой из них.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

2. Приведите примеры «1D»- и «3D»- моделирования.

3. Опишите коротко основные этапы математического моделирования на каком-либо конкретном примере (например, расчёте прочности).

4. Расскажите про источники погрешностей при математическом моделировании, приводящие к недостоверным результатам расчёта.

5. Докажите, что система единиц измерения «мм-Н-кг» является несогласованной при наличии в механической математической модели инерционных сил.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 2 ПРОЕКТИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ CAE-СИСТЕМ. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Преимущества проектирования с использованием CAE систем. Классификация типов инженерных расчетов. Основы метода конечных элементов. Классификация конечных элементов, используемых для проведения прочностных расчетов.*

Проектирование на основе численного моделирования и CAE-систем позволяет снижать издержки и сроки проектирования за счёт использования высокоточных математических моделей изделия или процесса. Такой подход также обеспечивает внедрение инноваций и внедрение новых стандартов качества продукции.

Инженерные расчёты с использованием CAE-технологий применяются во всех отраслях технической физики: в гидрогазодинамике, акустике, электричестве и магнетизме, теории упругости и механике и т.п. (рисунок 2.1).

Математический базис для большинства компьютерных программ, используемых для решения инженерных задач, составляет метод конечных элементов. Это универсальный метод для интегрирования уравнений в частных производных, снискавший особую популярность в области прочности конструкций и теплопередачи. Первые примеры использования МКЭ для решения задач прочности восходят к середине прошлого века и работам Аргириса [4]. Из систем, ориентированных на расчёты авиационных конструкций и разрабатывавшихся в СССР, отметим РИПАК [5] (рисунок 2.2).



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике




Рисунок 2.1 – Сферы применения численного моделирования на основе CAE-систем

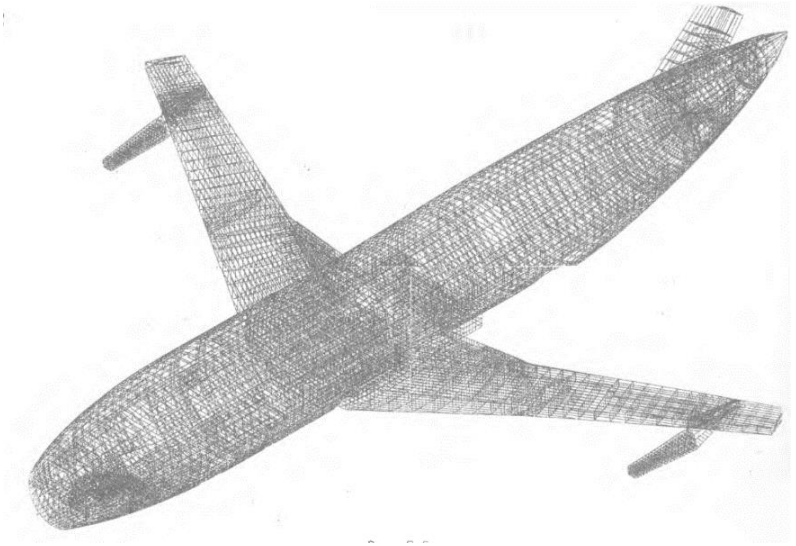


Рисунок 2.2 – Конечно-элементная модель планера самолёта; система РИПАК [5]



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Основная идея МКЭ состоит в разбиении геометрической модели конструкции на простые части, называемые конечными элементами (рисунок 2.3).

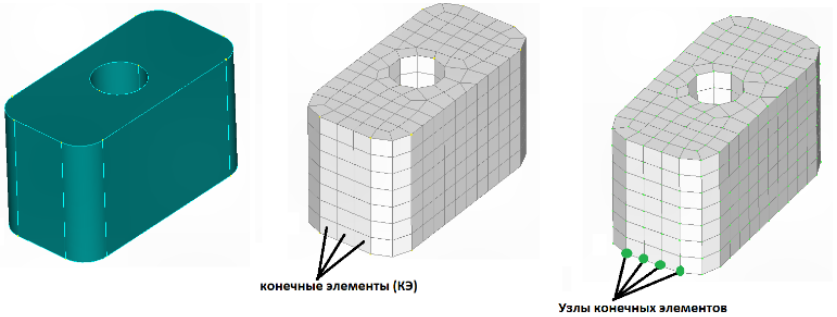



Рисунок 2.3 – Разбиение геометрической модели
на конечные элементы

Множество элементов и узлов образуют конечно-элементную сетку. Каждому узлу и элементу присваивается уникальный номер (идентификатор). Формальное описание узла сетки включает в себя номер и координаты, определяющие его положение в пространстве. Формальное описание конечного элемента включает в себя:

– номер;

– номера узлов сетки, образующих данный КЭ (это так называемая топологическая информация);

– характеристики материала (упругие постоянные, плотность и т.п.);

– дополнительные параметры, зависящие от типа элемента (например, толщина пластины).

Механическая связь (передача усилий) КЭ друг с другом обеспечивается через общие узлы (рисунок 2.4).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

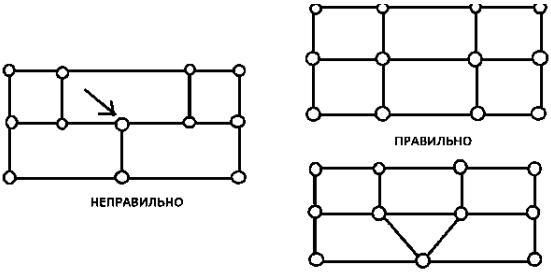



Рисунок 2.4 – Связь элементов друг с другом

*Классификация конечных элементов*

Классификация конечных элементов по размерности пространства представлена на рисунке 2.5.

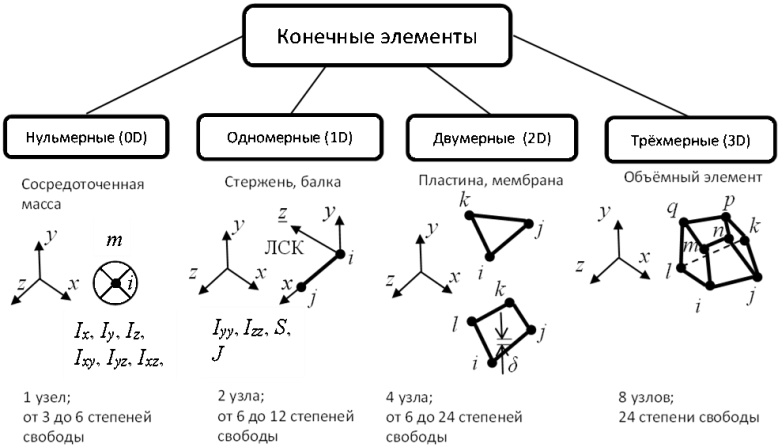



Рисунок 2.5 – Классификация конечных элементов
по размерности пространства

*Вычисление узловых нагрузок*

Нагрузки и закрепления задаются в узлах. Сосредоточенные силы вводятся напрямую, а все виды распределённых нагрузок


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

(давление на поверхность, погонная нагрузка вдоль линий) сводятся к узловым силам путём интегрирования по плои элемента (рисунок 2.6).

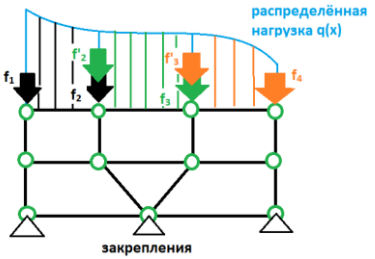



Рисунок 2.6 – Вычисление узловых нагрузок
на основе распределённой нагрузки

Для перехода от распределённой силы к узловых силам существует несколько способов. Для определённости рассмотрим одномерный случай с элементами первого порядка, когда погонная нагрузка распределена вдоль линии и задана некоторой зависимостью $q = q(x)$, а элементы имеют по два узла. Такая схема соответствует нагружению рамных конструкций, состоящих из 1D-балочных элементов. Важно отметить, что для функции $q(x)$ будет использоваться кусочно-линейная интерполяция по узлам – так делается, в частности в системе Siemens Femap, и это удобно для последующего обобщения алгоритма на случай тонкостенных конструкций, поверхности которых разбиты на сеть из тре- и четырёхугольных оболочечных элементов.

*Первый способ.* Для каждого элемента вычисляется интеграл от погонной нагрузки – это суммарная сила, действующая на элемент. Далее она делится поровну между узлами и добавляется в общий вектор узловых нагрузок. Если обозначить через $f_1$ и $f_2$ узловые нагрузки от текущего элемента, то получим


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

$$f_1 = f_2 = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} q(x)\,dx\,.$$

Данный способ самый простой и требует минимального количества арифметических операций, что в контексте больших моделей, состоящих из сотен тысяч и миллионов элементов может оказаться существенным.

*Второй способ.* Сумма узловых сил элемента, как и в первом способе, равна равнодействующей. По величине силы в общем случае не равны, а пропорциональны значению погонной нагрузки в соответствующем узле. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = \int_{x_1}^{x_2} q(x)\,dx, \\ \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{q_1}{q_2}. \end{cases}$$

Здесь $q_i = q(x_i),\ i = 1,2$. Именно таким способом вычисляются узловые силы в препроцессоре Siemens Femap при задании нагрузки через команду Force Per Length.

*Третий способ.* Первое уравнение оставим, как и в первом способе, а второе составим из условия, чтобы момент от пары узловых сил элемента $f_1$ и $f_2$ относительно некоторой точки (например, начала координат) был равен моменту от распределённой нагрузки. Получим:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = \int_{x_1}^{x_2} q(x)\,dx, \\ f_1 x_1 + f_2 x_2 = \int_{x_1}^{x_2} x q(x)\,dx. \end{cases}$$


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Проверим точность вычисления узловых сил каждым способом на примере балки, составленной из 1D-балочных элементов и нагруженной квадратично изменяющейся погонной силой.

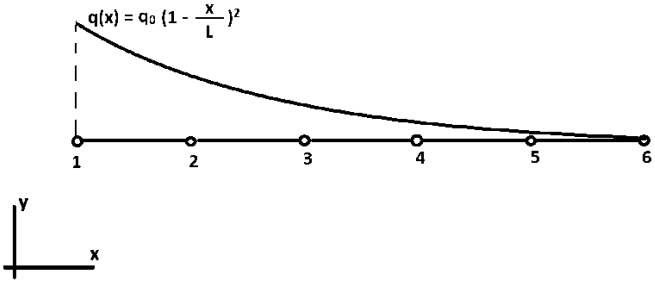



Рисунок 2.7 – Балка с распределённой нагрузкой.
Начало координат – в узле 1

Для автоматизации решения задачи написана специальная программа на языке C++[1]. Для решения системы уравнений использовалась библиотека Eigen [6]. Интегралы вычислялись численно по двухточечной схеме метода Гаусса [7], обеспечивающей точный результат для полиномиальных подынтегральных функций порядка не выше третьего включительно. Для определённости примем $L$ = 100 мм, $q_0 = 10^4$ Н/мм. Результаты расчётов сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1. **Значения узловых сих, Н**

| № узла | 1 способ | 2 способ | 3 способ |
|---|---|---|---|
| 1 | 82000,0 | 100000,0 | 88000,0 |
| 2 | 132000,0 | 128000,0 | 130667,0 |
| 3 | 76000,0 | 72000,0 | 74666,7 |
| 4 | 36000,0 | 32000,0 | 34666,7 |
| 5 | 12000,0 | 8000,0 | 10666,7 |
| 6 | 2000,0 | 0,0 | 1333,3 |

[1] Получить исходный код можно, написав автору на evgeniy.kishov@ssau.ru.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Окончание табл.2.1

| | | | |
|---|---|---|---|
| Суммарная сила ΣQ, Н | 340000 | 340000 | 340000 |
| Суммарный момент ΣM, Н·мм | $9 \cdot 10^6$ | $8 \cdot 10^6$ | $8{,}67 \cdot 10^6$ |
| Точное значение ΣQ, Н | 340000 | | |
| Точное значение ΣM, Н·мм | $8{,}67 \cdot 10^6$ | | |
| Относительная погрешность по силе, % | 0,0 | 0,0 | **0,0** |
| Относительная погрешность по моменту, % | 3,8 | 7,7 | **0,0** |

Здесь точные значения силы и момента вычислялись как интегралы по всей длине балки:

$$\sum Q = \int_0^L q(x)\,dx,$$

$$\sum M = \int_0^L xq(x)\,dx.$$

Видно, что наивысшую точность даёт третий способ, обеспечивая требуемое значение силы и момента как в каждом элементе, так и по всей модели. Все три способа обеспечивают выполнение равенства по силе. Второй способ (реализованный в промышленной CAE-системе Siemens Femap) выглядит наименее точным не столько ввиду наибольшей погрешности по моменту (для другого закона распределения картина в сравнении с первым способом может быть иной), сколько ввиду равенства нулю узловых сил в тех точках, где распределённая нагрузка равна нулю. Это приводит к тому, что некоторые участки конструкции в модели окажутся «выключенными» из работы, чего нет в реальности. Попутно заметим, что первый способ, несмотря на простоту реализации и малое количество арифметических операций, даёт вполне достойную точность.

Сформулируем теперь более общий алгоритм вычисления узловых сил, пригодный, в частности, для нагружения оболочечных


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

конструкций. В качестве распределённой нагрузки используется аэродинамическое давление, полученное либо по результатам продувок в аэродинамической трубе, либо по результатам CFD-расчёта. Итак, имеется сеть из поверхностных четырёхузловых элементов, в каждом узле которых известен вектор давления (вектор силы, действующей на единицу площади) $\mathbf{p}_i = \left( p_{xi}, p_{yi}, p_{zi} \right)$, $i = 1,\ldots,4$. В пределах элемента давление вычисляется по закону билинейной интерполяции:

$$\mathbf{p}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} \psi_i(\xi,\eta)\mathbf{p}_i ,$$

где $\psi_i$ – функции формы четырёхузлового элемента:

$$\psi_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \; i = 1,\ldots,4$$

и $(\xi_i, \eta_i)$ – изопараметрические координаты узлов элемента, приведённые в таблице 2.2.

Таблица 2.2. **Изопараметрические координаты четырёхузлового элемента**

| № узла | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $(\xi_i, \eta_i)$ | $(-1,-1)$ | $(1,-1)$ | $(1,1)$ | $(-1,1)$ |

Исходя из требований равенства суммы и момента от узловых сил равнодействующим значениям, сформируем для элемента следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} \mathbf{f}_i = \int \mathbf{p} dS, \\ \sum_{i=1}^{4} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) dS. \end{cases}$$


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Здесь $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ – радиус вектор $i$-го узла, символом «$\times$» обозначено векторное произведение, интегралы вычисляются по площади элемента. Данная система в скалярной форме распадается на 6 уравнений: 3 для силы и 3 для момента. При этом всего неизвестных величин $3 \cdot 4 = 12$ (4 узловых вектора силы, по 3 компоненты в каждом). Чтобы поставить в соответствие количество уравнений и количество неизвестных, предлагается искать узловые силы в виде

$$\mathbf{f}_i = D\mathbf{p}_i + \mathbf{c},\ i = 1,\ldots,4, \qquad (2.1)$$

где $D = \mathrm{diag}(d_x, d_y, d_z)$ – диагональная матрица масштабных коэффициентов,

$\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ – вектор смещения.

Первое слагаемое в формуле (2.1) обеспечивает пропорциональность вектора нагрузки давлению в соответствующем узле, а вектор смещения – ненулевое значение узловой силы даже при нулевом значении давления, создавая тем самым заданный момент. Всего таким образом получается 6 неизвестных. В развёрнутом виде система уравнений относительно этих неизвестных имеет вид:

$$\begin{cases} d_x \sum p_{xi} + 4c_x = \int p_x dS, \\ d_y \sum p_{yi} + 4c_y = \int p_y dS, \\ d_z \sum p_{zi} + 4c_z = \int p_z dS, \\ d_z \sum y_i p_{zi} + c_z \sum y_i - d_y \sum z_i p_{yi} - c_y \sum z_i = \int (yp_z - zp_y) dS, \\ -d_z \sum x_i p_{zi} - c_z \sum x_i + d_x \sum z_i p_{yi} + c_x \sum z_i = \int (-xp_z + zp_x) dS, \\ d_y \sum x_i p_{yi} + c_y \sum x_i - d_x \sum y_i p_{xi} - c_x \sum y_i = \int (xp_y - yp_x) dS. \end{cases}$$

Или в матричной форме:


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

$$\begin{bmatrix} \sum p_{xi} & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sum p_{yi} & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \sum p_{zi} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\sum z_i p_{yi} & \sum y_i p_{zi} & 0 & -\sum z_i & \sum y_i \\ \sum z_i p_{xi} & 0 & -\sum x_i p_{zi} & \sum z_i & 0 & -\sum x_i \\ -\sum y_i p_{xi} & \sum x_i p_{yi} & 0 & -\sum y_i & \sum x_i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int p_x dS \\ \int p_y dS \\ \int p_z dS \\ \int (yp_z - zp_y) dS \\ \int (-xp_z + zp_x) dS \\ \int (xp_y - yp_x) dS \end{bmatrix}$$

В заключении темы о вычислении узловых нагрузок отметим ещё один способ, изложенный в книге [8]. Идея основана на принципе равенства работ, которые создают узловые и распределённые силы на перемещениях узлов элемента. Итоговая формула для силы в *i*-м узле для четырёхузловой пространственной пластины имеет вид:

$$\mathbf{f}_i = \int A(\xi,\eta)\mathbf{p}(\xi,\eta)dS\,,\ i = 1,\ldots,4, \qquad (2.2)$$

где $A(\xi,\eta) = \mathrm{diag}(\psi_i,\psi_i,\psi_i)$ – диагональная матрица функций формы, $\mathbf{p}(\xi,\eta)$ – распределение давления по элементу.

Любопытный результат даёт применение этого способа к одномерному случаю – вычислению узловых сил для элемента балки из примера выше. При этом узловые интегралы легко вычисляются аналитически. Погонная нагрузка в результате линейной интерполяции по элементу имеет вид

$$q(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)q_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)q_2\,.$$

Сила в *1* узле согласно методу [6]:

$$f_1 = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{1}{2}(1-\xi)}_{\text{функция формы}} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)q_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)q_2\right] dx.$$

Переходя к переменной $\xi$ и соответствующим ей пределам интегрирования, получим


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

$$f_1 = \frac{\Delta l}{8}\int_{-1}^{1}\left[\left(1-\xi\right)^2 q_1 + \left(1-\xi^2\right)q_2\right]d\xi\,,$$

где $\Delta l = x_2 - x_1$. Вычисляя интегралы, получим

$$f_1 = \frac{\Delta l}{6}\left(2q_1 + q_2\right).$$

Аналогичные вычисления для второго узла дают

$$f_2 = \frac{\Delta l}{6}\left(q_1 + 2q_2\right).$$

Легко проверить, что сумма сил $f_1 + f_2$ даёт равнодействующую для трапециевидного закона распределения погонной нагрузки. Момент относительно начала координат равен

$$M = f_1 x_1 + f_2 x_2 = \frac{\Delta l}{6}\left(2q_1 + q_2\right)x_1 + \frac{\Delta l}{6}\left(q_1 + 2q_2\right)x_2. \qquad (2.3)$$

Для проверки того, равен ли он равнодействующему моменту от распределённой силы, найдём интеграл

$$M = \int_{x_1}^{x_2} x\left[q_1 + \frac{\Delta q}{\Delta l}\left(x - x_1\right)\right]dx,$$
$$\Delta q = q_2 - q_1.$$

Здесь использовано выражение для линейно изменяющейся на участке $x_1 \ldots x_2$ погонной нагрузки через абсолютную координату $x$. Вычисления дают

$$M = \frac{1}{2}q_1\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \frac{\Delta q}{\Delta l}\left[\frac{1}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) - \frac{x_1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right]. \qquad (2.4)$$

Кажется далеко не очевидным тот факт, что выражения (2.3) и (2.4) – это одно и то же. Однако путём внимательного проведения


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

несложных алгебраических выкладок с формулой (2.4) оказывается, что это действительно так – что и предлагается проверить читателю.

Таким образом, мы приходим к замечательному факту: *узловые силы, вычисленные по критерию равенства работ автоматически удовлетворяют условиям равенства как по силе, так и по моменту!* В этой связи данный метод представляется наиболее перспективным, т.к. не требует решения системы уравнений, а только однократное численное интегрирование по площади (длине) элемента. Кроме того, учитывая явное присутствие в (2.2) аппроксимирующих функций элемента (функций формы), а также энергетическую природу метода, близкую по духу к процедуре получения основных уравнений МКЭ, есть основания полагать, что данный метод обеспечивает наиболее точные значения узловых сил, эквивалентных заданной распределённой нагрузке.

### *Контрольные вопросы*

1. Назовите сферы применения численного моделирования в инженерной деятельности.

2. Назовите минимальный набор информации, необходимый для описания узла и элемента.

3. Приведите классификацию конечных элементов.

4. Расскажите о принципах вычисления узловых сил на основе распределённых нагрузок. Какой из подходов Вам представляется наиболее точным? Наиболее простым?



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 3 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ СЕТКИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Способы построения конечно-элементной модели. Классификация геометрических моделей. Особенности построения геометрических моделей для решения задач математического моделирования. Алгоритмы построения конечно-элементных сеток. Структурированные и не структурированные сетки конечных элементов.*

Можно выделить три способа построения конечно-элементной модели: ручной, полуавтоматический и автоматический. При ручном способе координаты узлов и номера узлов элементов создаются в интерактивном диалоговом режиме (рисунок 3.1).




Рисунок 3.1 – Диалоги создания узла КЭМ (слева) и элемента (справа) в системе Siemens Femap

Несмотря на кажущуюся нецелесообразность самого существования такого способа в эпоху, когда КЭ-модели насчитывают сотни тысяч элементов и узлов, «ручное» создание с объектов КЭМ (равно как и ручная манипуляция с сеткой вообще) необходимо для создания, например, специальных элементов типа жёстких связей



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

или просто для быстрого добавления/удаления элементов без необходимости модификации геометрической модели.

Полуавтоматический способ построения сетки связан с использованием команд, осуществляющих автоматическую генерацию узлов и элементов на основе заданных вручную опорных объектов. Примеры работы некоторых таких команд в системе Siemens Femap приведены ниже.

*Команда «Mesh → Region»*

Выбираются две группы узлов – и между ними создаётся сетка из плоских или объёмных элементов (рисунок 3.2).

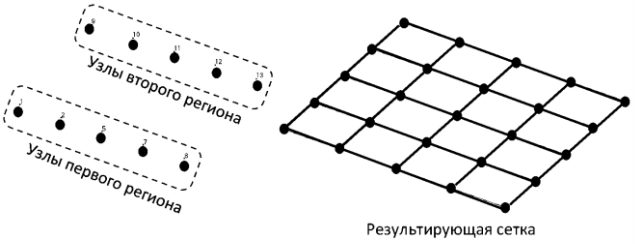



Рисунок 3.2 – Пример использования команды «Mesh → Region»

*Команда «Mesh → Copy»*

Команда осуществляет копирование узлов и элементов вдоль заданного направления (рисунок 3.3).

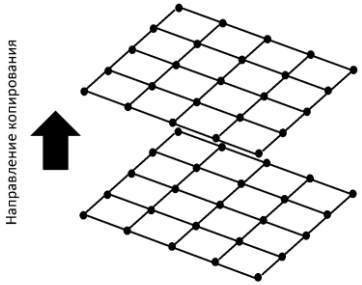



Рисунок 3.3 – Пример использования команды «Mesh → Copy»



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Команда «Mesh → Extrude» (рисунок 3.4).

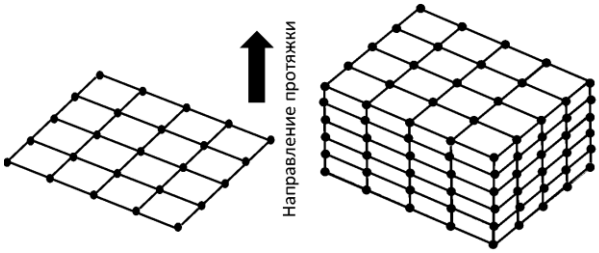



Рисунок 3.4 – Пример построения сетки протяжкой

Для автоматического построения конечно-элементной модели требуется геометрическая модель, которая, аналогично элементам, классифицируется по размерности пространства: 1D, 2D и 3D. Модель из одномерных тел представляет из себя набор линий, которые моделируются балочными или стержневыми элементами с шестью или тремя степенями свободы в узле соответственно (рисунок 3.5).

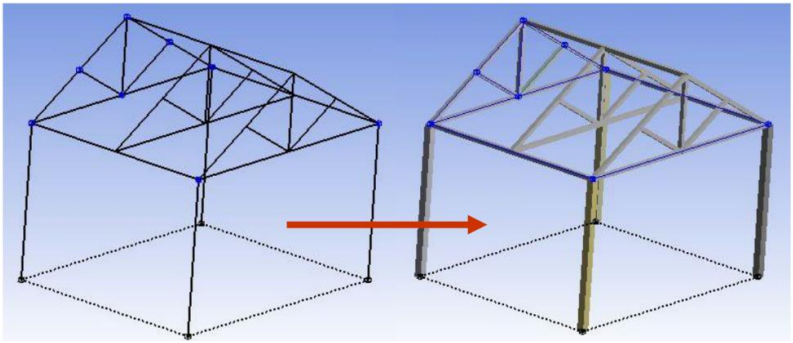


Рисунок 3.5 – Геометрическая модель из одномерных тел
и сетка балочных элементов с показанными поперечными сечениями

Двумерная геометрия может быть двух видов. Первый вид – набор пространственных оболочек, толщина которых указывается в


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

свойствах модели. Данный вид геометрии разбивается на сеть из так называемых shell-элементов, имеющих по 6 степеней свободы в узле (рисунок 3.6).

Другой вид двумерной геометрии составляют плоские тела. Они разбиваются сетью из 2D-элементов с набором из поступательных степеней свободы. Кроме того, плоские тела могут использоваться для моделирования осесимметричных тел в 2D-постановке (рисунок 3.7).

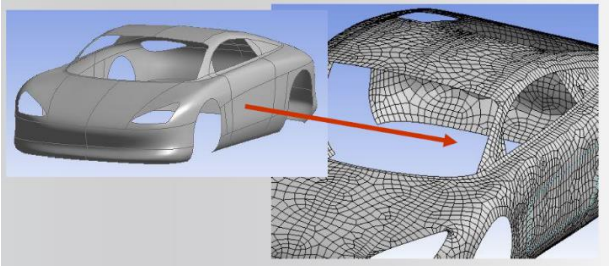


Рисунок 3.6 – Оболочечная геометрическая модель
и сетка из shell-элементов

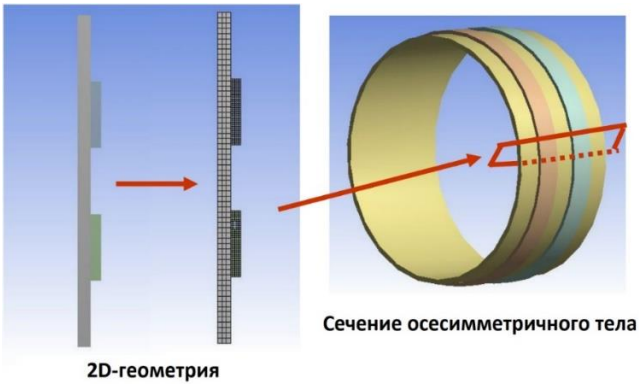



Рисунок 3.7 – Моделирование осесимметричных конструкций


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Трёхмерная геометрия представляется в виде набора объёмных тел, для которых строится сетка из объёмных КЭ с поступательными степенями свободы (рисунок 3.8).

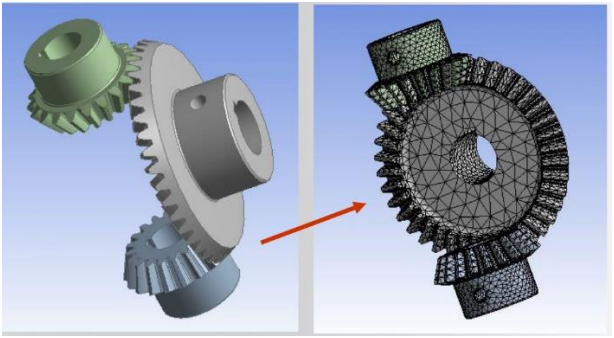


Рисунок 3.8 – Твердотельная модель

*Особенности построения геометрических моделей*

Конструкторская геометрическая модель, как правило, содержит в себе объекты, несущие информацию, важную с точки зрения эксплуатационных и технологических операций, но несущественную с точки зрения физических процессов (например, с точки зрения деформационных процессов, т.е. жёсткости и прочности). Такие объекты следует удалять (рисунок 3.9).

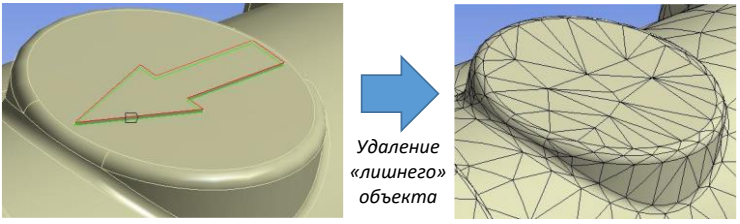



Рисунок 3.9 – Удаление несущественных для CAE-расчёта геометрических объектов



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

В некоторых CAE-системах (в частности, в Ansys Mechanical) существует механизм автоматического распознавания и удаления несущественных геометрических объектов, называемый «Defeaturing».

При построении сетки очень важно обращать внимание на связность узлов друг с другом для тел, которые должны работать совместно. Простейшей опцией здесь является булево объединение тел. Однако такой подход не всегда рационален с точки зрения формы элементов, т.к. зачастую приводит необходимости строить тетраэдральную сетку. Более уместным может оказаться операция по объединению топологии контактирующих геометрических объектов (граней, рёбер). Пример показан на рисунке 3.10.

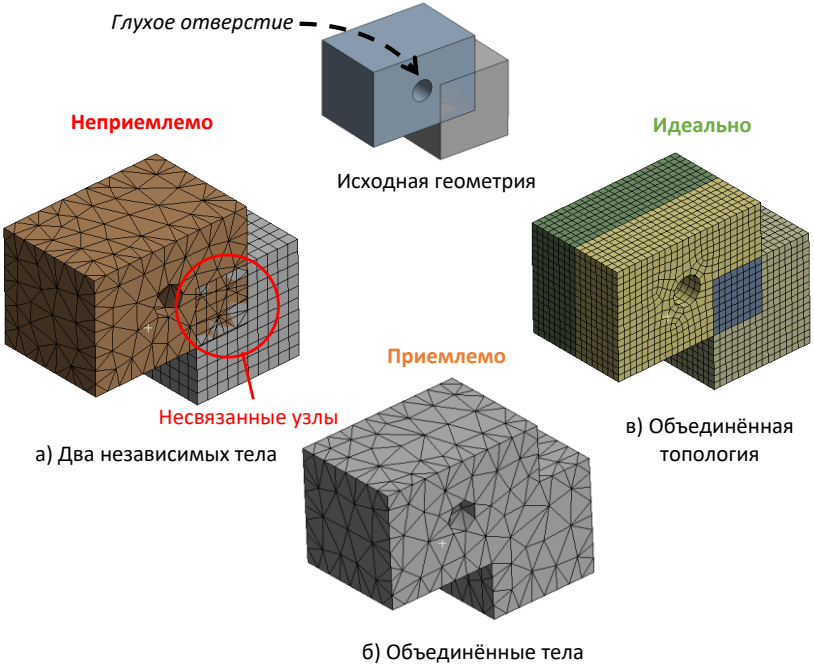



Рисунок 3.10 – Сравнение различных способов связи узлов тел


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

На рисунке выше перед объединением топологии осуществлено дополнительное рассечение геометрии на части для образования тел, на которых может быть построена структурированная гексагональная сетка (про структурированные сетки – см. ниже).

Если тела не пересекаются, то обеспечить их механическую связь между собой можно при помощи наложения контакта типа «склейка» на соприкасающиеся поверхности (контакт «Bonded» в Ansys и контакт «Glued» в Femap). Тем не менее, если имеется возможность обеспечить связь тел посредством общих узлов, следует использовать именно этот вариант как обеспечивающий наименьшую погрешность и наибольшую скорость расчёта.

*Алгоритмы построения конечно-элементных сеток. Структурированные и не структурированные сетки конечных элементов.*

Основой для автоматического построения сеток является алгоритм триангуляции в 2D и 3D. Триангуляция на плоскости – это процесс построения множества непересекающихся треугольников на множестве заданных точек как на вершинах. В пространстве результатом триангуляции является массив тетраэдров. Заданное множество точек можно триангулировать различными способами. На практике широкое применение нашла триангуляция Делоне[2], которая предотвращает возникновение сильно вытянутых треугольников и для построения которой существует множество алгоритмов с приемлемыми вычислительными затратами.

Триангуляция называется триангуляцией Делоне, если внутри описанной вокруг любого треугольника окружности отсутствуют вершины других треугольников [9]. Простейший алгоритм можно описать следующим образом:

1) для каждой точки найти ближайшую и построить ребро;

2) найти для ребра две ближайшие точки с одной и другой стороны в смысле, указанном ниже;

[2] Делоне, Борис Николаевич (1890–1980) – русский и советский математик.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

3) построить на ребре и найденным ближайшим точкам два треугольника (или один, если ребро является граничным и ближайшая точка находится только с одной стороны);

4) триангуляция считается завершённой, если не осталось точек, не принадлежащих ни одному из треугольников.

Поясним, что в данном алгоритме понимается под «ближайшей для ребра точкой» с некоторой его стороны. А именно, если построить окружность через данную точку и две точки ребра, то внутрь неё не должно попасть никаких других точек с данной стороны. На рисунке 3.11 точка D является «ближайшей» к ребру AB в смысле триангуляции Делоне, поскольку окружность, построенная по точкам A, B и D не содержит в себе никаких других точек (в данном случае, точку C). Точка C несмотря на то, что расположена ближе к ребру в классическом геометрическом смысле, не является «ближайшей» в смысле триангуляции, поскольку внутрь окружности, проходящей через точки A, B и C, попадает точка D.

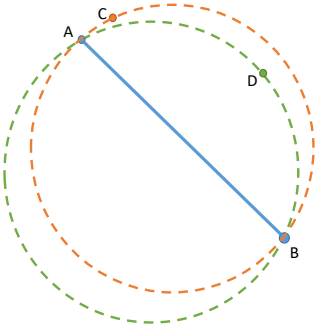



Рисунок 3.11 – Определение ближайшей точки до ребра при построении триангуляции

Сетки из треугольных элементов могут быть при помощи специальных алгоритмов преобразованы в сетку из четырёхугольников, которые являются более предпочтительными элементами с


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

точки зрения точности МКЭ-расчёта. На первом этапе каждый треугольник разбивается на три четырёхугольника по алгоритму Катмулла-Кларка [10] (рисунок 3.12).

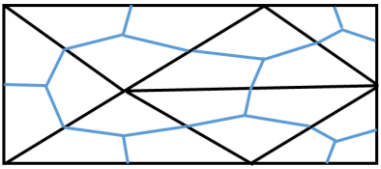


Рисунок 3.12 – Алгоритм Катмулла-Кларка:
каждый треугольник разбивается на три четырёхугольника путём соединения центра тяжести треугольников с серединами рёбер

На втором этапе осуществляется регуляризация сетки, т.е. улучшение формы четырёхугольников путём перемещения точек и изменения топологии сетки (рисунок 3.13). Примеры регуляризации приведены в статье [11].

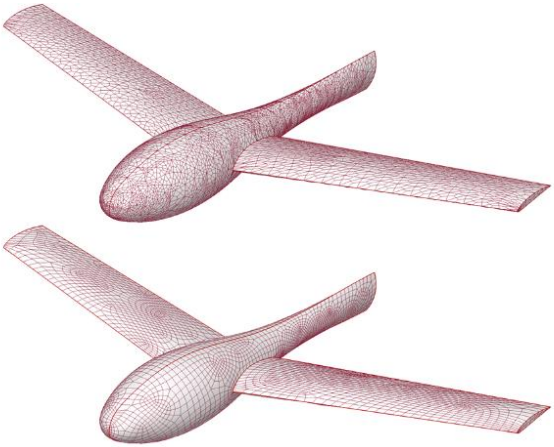


Рисунок 3.13 – Сетка из четырёхугольников до регуляризации (наверху) и после (внизу) [11]



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Рассмотренные выше сетки являются неструктурированными, поскольку в размерах и форме элементов присутствует определённый произвол. В определённых случаях удаётся построить упорядоченную сетку, элементы которой образуют явную геометрическую структуру (рисунок 3.14). Упорядоченные сетки при отсутствии сильно скошенных элементов, как правило, предпочтительнее неупорядоченных, но требуют особой декомпозиции («нарезки») геометрии.

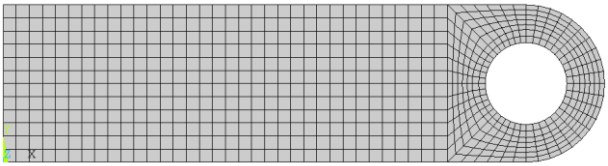


Рисунок 3.14 – Пример построения упорядоченной сетки на проушине

Построить упорядоченную сетку можно на тре- и четырёхугольных поверхностях (рисунок 3.15).

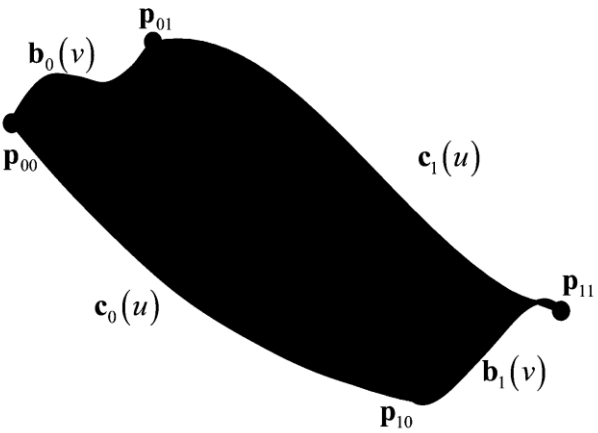



Рисунок 3.15 – Пример трёхмерной поверхности,
построенной по четырём кромкам и четырём вершинам


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Идея алгоритма состоит в следующем. Построим на опорных кромках поверхность Кунса, описываемую следующей вектор-функцией [2]:

$$\mathbf{r}(u,v) = (1-v)\mathbf{c}_0(u) + v\mathbf{c}_1(u) + (1-u)\mathbf{b}_0(v) + u\mathbf{b}_1(v) -$$
$$-(1-u)(1-v)\mathbf{p}_{00} - u(1-v)\mathbf{p}_{10} - (1-u)v\mathbf{p}_{01} - uv\mathbf{p}_{11},$$
$$0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1.$$

Здесь обозначения линий и точек соответствуют рисунку выше. Данная функция отображает единичный квадрат в пространстве параметров *u*-*v* на трёхмерную поверхность. Построить сетку на квадрате относительно просто – в результате получим топологию сети (матрицу связи «элемент-узел») и координаты узлов в «виртуальном» пространстве *u*-*v*. Физические координаты узлов вычисляются далее по параметрическому уравнению поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$. Реальная поверхность, однако, может отличаться от поверхности Кунса. Поэтому полученные координаты узлов, не лежащих на рёбрах, нужно спроецировать на реальную поверхность по нормали к ней. Таким образом, получим итоговую упорядоченную сетку из четырёхугольных элементов на пространственной поверхности.

### *Контрольные вопросы*

1. Перечислите способы построения конечно-элементной модели.
2. Как вы понимаете термин «defeaturing»?
3. Как обеспечить связь элементов друг с другом «узел-в-узел», построенных на смежных телах?
4. Как называется алгоритм триангуляции, предотвращающий появление сильно вытянутых треугольников? В чём его основная идея?


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

5. Опишите основную идею алгоритма получения сетки из четырёхугольных элементов на основе треугольного разбиения поверхности.

6. Опишите основную идею алгоритма построения структурированных сеток на поверхности.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 4 РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ В CAE СИСТЕМАХ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ: ЗАКРЕПЛЕНИЕ И НАГРУЖЕНИЕ

*Расчет на прочность и жёсткость. Линейный и нелинейный расчет. Соединение деталей контактами и шарнирами. Условия закрепления. Объемные силы. Распределенные по поверхности и точечные силы и моменты. Особенности приложения нагрузок к отверстиям под оси вращения.*

Целью расчёта на прочность, как правило, является определение напряжений в каждой точке конструкции. Зная напряжения и сравнив их с допускаемым значением для данного материала, можно сделать вывод о прочности конструкции. Определение действующих эквивалентных напряжений осуществляется в соответствии с той или иной феноменологической теорией прочности, которые рассматриваются в курсе сопротивления материалов. При расчёте металлических конструкций наибольшее распространение получила теория Мизеса, эквивалентные напряжения согласно которой вычисляются как

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)} \quad (4.1)$$

Соответственно, условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{eqv} \le [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение для данного материала.

При расчёте методом конечных элементов в результате получается поле напряжений, т.е. в каждой точке каждого элемента



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

можно найти все компоненты тензора напряжений. Подавляющее большинство МКЭ-систем реализуют метод перемещений, когда в качестве основных неизвестных выступают компоненты вектора перемещений узлов – и именно для них составляется система уравнений равновесия. Основные процедуры МКЭ с точки зрения логической структуры реализующей данный метод программы, приведены ниже.

1. Чтение входного файла, формирование массивов узлов, элементов, материалов, свойств элементов, нагрузок и закреплений.
2. Вычисление матриц связи перемещений и деформаций элементов $\boldsymbol{\beta}$.
3. Вычисление матриц упругости элементов $\boldsymbol{\kappa}$.
4. Вычисление матриц жесткости элементов $\mathbf{k} = \int \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\beta} dV$.
5. Формирование векторов нагрузок элементов $\mathbf{f}_e$.
6. Формирование глобального вектора нагрузок $\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_e$.
7. Идентификация неизвестных перемещений $\mathbf{u}_\alpha$ формирование разрешающей системы уравнений $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$.
8. Решение системы уравнений.
9. Вычисление векторов напряжений, деформаций, реакций опор и других результатов.

Напряжения вычисляются после нахождения неизвестных перемещений. Выполняется эта операция по формуле

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\left(\boldsymbol{\beta}\mathbf{u}_e\right), \qquad (4.2)$$

где $\mathbf{u}_e$ – вектор перемещений узлов элемента.

Здесь матрица $\boldsymbol{\beta}$ является в общем случае функцией координат, что обеспечивает изменение напряжений по объёму элемента. Если при построении матрицы жёсткости используется схема интегрирования Гаусса, то наиболее точные значения напряжений будут


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

в точках интегрирования, потому что именно в них вычисляются коэффициенты матрицы жёсткости. Стоит отметить любопытный факт – поле напряжений, вообще говоря, терпит конечный разрыв по границам раздела элементов, т.е. в этих участках не выполняется условие равновесия. Силовое равновесие в МКЭ обеспечивается лишь в узлах.

Формулы (4.1) и (4.2) решают задачу о нахождении напряжений, что позволяет, в итоге, оценить прочность.

Различные способы визуализации напряжений показаны на рисунке 4.1.

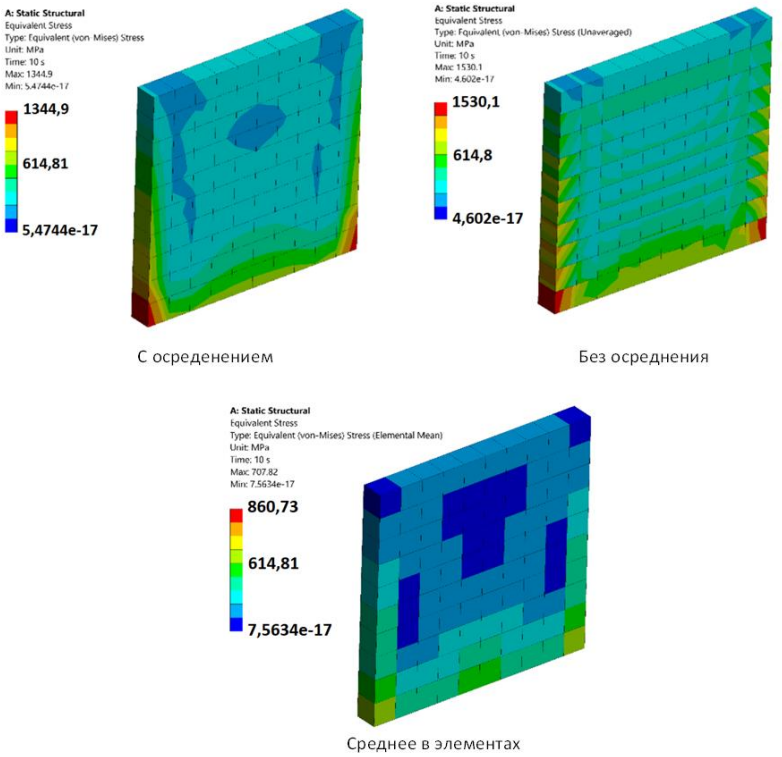



Рисунок 4.1 – Способы визуализации результата расчёта


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

На картинке «без осреднения» показано фактическое поле эквивалентных напряжений в элементах. Хорошо видны разрывы на межэлементных границах. Для упрощения анализа, как правило, результат смотрят в осреднённой форме. При этом в каждый узел сетки записывается среднее напряжение элементов, в которые входит данный узел. Среднее значение в элементах, как правило, характеризуется более низкими значениями напряжений, чем осреднённая по узлам картина. Такой способ рекомендуется использовать на крупных сетках, когда погрешность интерполяции напряжений из точек интегрирования в узлы велика.

Для оценки жёсткости используются компоненты вектора перемещений. Суммарное перемещение вычисляется как $U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$ (рисунок 4.2).

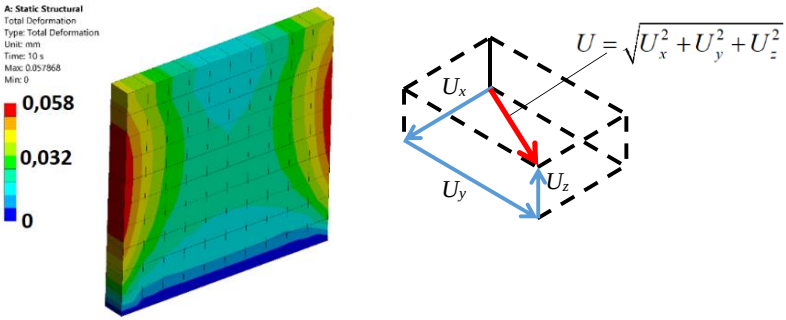



Рисунок 4.2 – Вычисление полных перемещений

*Линейный и нелинейный расчет*

В линейном расчёте предполагается прямая пропорциональность между нагрузкой и возникающими в результате её действия перемещениями: увеличение нагрузки в $N$ раз приводит к увеличению прогибов в $N$ раз (рисунок 4.3). Линейная модель является хорошей аппроксимацией для многих задач; с помощью неё было


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

спроектировано бессчётное количество конструкций и сооружений. Тем не менее, не так много реальных объектов обладают 100%-линейным поведением.

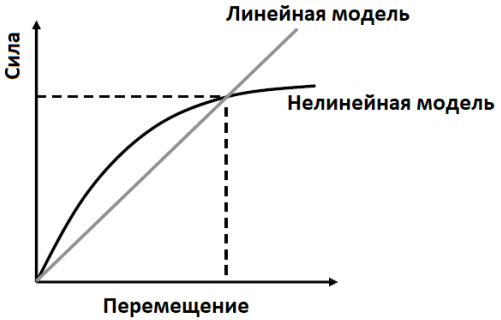



Рисунок 4.3 – Схематичное изображение линейной и нелинейной диаграмм нагружения конструкции

В линейном расчёте материал подчиняется закону Гука во всём диапазоне деформаций.

Нелинейные модели, как правило, более точно описывают реальные деформационные процессы в конструкциях. Выделяют 3 типа нелинейностей:

1) геометрическая нелинейность (учёт больших деформаций);

2) физическая нелинейность (пластичность, гиперупругость, ползучесть и т.п.);

3) контактная нелинейность.

Едва ли не простейший пример геометрической нелинейности приведён в [11] – задача о двух шарнирно соединённых стержнях, нагруженных поперечной силой (рисунок 4.4).

В недеформированном состоянии данная конструкция является механизмом. При этом любопытно, что расчёт в Femap/Nasrtan формально выполняется без ошибок. Только с настройками решателя


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

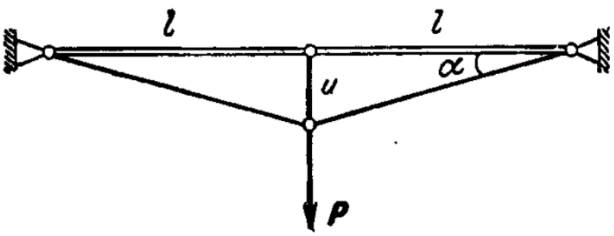



Рисунок 4.4 – Задача о двух шарнирно соединённых стержнях, нагруженных поперечной силой [12]

по умолчанию получаются нулевые результаты, т.к. Nastran автоматически закрепляет степени свободы, которым соответствуют нулевые строки и столбцы матрицы жёсткости. Если это автоматическое закрепление убрать, то расчёт, как ни странно, всё равно выполняется, однако с нефизичным результатом: относительно большим прогибом при нулевых усилиях в стержнях (видимо, так проявляется плохая обусловленность системы уравнений). Только при включении нелинейного решателя SOL106 (Nonlinear Static) и опции LGDISP в настройках (LarGe DISPlacement) удаётся получить физически адекватный результат (рисунок 4.5, рисунок 4.6). Количество шагов нагрузки принято равным трём.

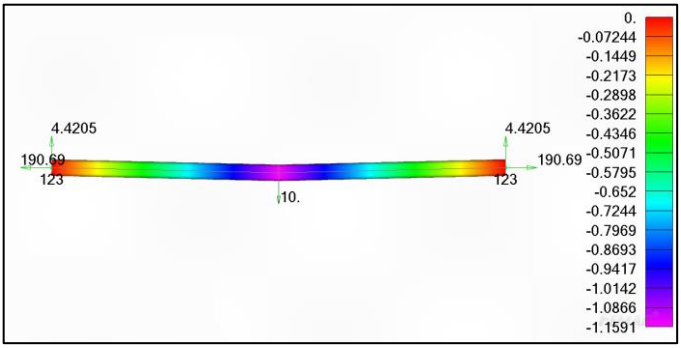



Рисунок 4.5 – Поле перемещений вдоль оси Y (вертикальной оси)


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

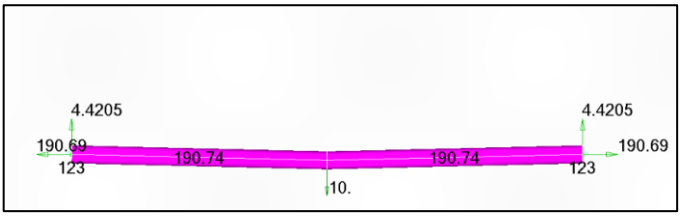



Рисунок 4.6 – Усилия в стержнях

На рисунках выше показаны также компоненты сил реакции в опорах. Выполним аналитический расчёт для сравнения с МКЭ. Условие равновесия свободного узла в деформированной конфигурации в проекции на ось Y записывается как

$$2N\sin\alpha = P\,.$$

Далее из геометрии задачи имеем:

$$\cos\alpha = \frac{l}{l+\Delta l}\,,\ \sin\alpha = \frac{u}{l+\Delta l}\,,\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{u}{l}$$

где $\Delta l$ – удлинение стержня. Откуда

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1\,. \qquad (4.3)$$

По закону Гука,

$$N = ES\cdot\frac{\Delta l}{l}\,. \qquad (4.4)$$

Подставляя (4.3) в (4.4), получим выражение для силы в стержне:

$$N = ES\cdot\left(\mathrm{tg}\alpha - \sin\alpha\right).$$

Или с учётом выражения тангенса и синуса через длины стержней и перемещения:


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

$$N = ES \cdot \left( \frac{u}{l} - \frac{u}{l + \Delta l} \right).$$

По теореме Пифагора, $l + \Delta l = \sqrt{u^2 + l^2}$, откуда

$$N = ES \cdot \left( \frac{u}{l} - \frac{u}{\sqrt{u^2 + l^2}} \right) = ES \cdot \frac{u}{l} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{u}{l} \right)^2}} \right) = ES \cdot f\left( \frac{u}{l} \right).$$

График функции $f = f\left(u/l\right)$ приведён на рисунке 4.7.

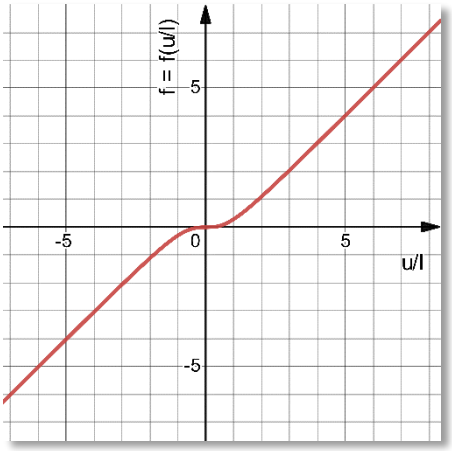



Рисунок 4.7 – График функции $f = f\left(u/l\right)$

Примем следующие значения для параметров (соответствующих параметрам КЭМ): $P$ = 10 Н, $E$ = 71000 МПа, $S$ = 10 мм$^2$ и решим численно уравнение

$$2ES \cdot f\left( \frac{u}{l} \right) = P$$


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

относительно $u/l$.

Вычисления дают $u/l = 0,02415$. С учётом длины стержня *l = 50* мм, получим вертикальное перемещение свободного узла

$$u = 0,02415 \cdot 50 = 1,2075 \text{ мм.}$$

Сравнивая это значение с результатом Nastran (4.5; 1,1591 мм по модулю), получим отличие в 4%, что выглядит удовлетворительно. Найдём усилие *N* как

$$N = \frac{P}{2\sin\alpha} = \frac{P}{2} \cdot \frac{u}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2}}.$$

Здесь использовано выражение синуса угла через его тангенс. Проведя вычисления, получим *N* = 207,16 Н. Сравнивая с результатом по МКЭ (рис.4.5; 190,74 Н), получим разницу почти в 8% – т.е. по усилиям (и, следовательно, по напряжениям) разница более ощутима.

Добавим, что достичь точного решения (силового равновесия) в МКЭ в данной задаче всё-таки удалось путём увеличения количества шагов нагрузки до 10, т.е. при более «плавном» нагружении.

Таким образом, даже на простейшей геометрически нелинейной задаче с, фактически, одной степенью свободы имеется заметное расхождение численного с расчёта, полученного на настройках по умолчанию, с аналитическим. Поэтому при КЭ-решении нелинейных задач может потребоваться настройка параметров программы, отвечающих за точность найденного решения.

*Физическая нелинейность* характеризуется наличием в модели материалов, которые могут проявлять неупругое поведение и, в частности, могут накапливать пластические деформации. Переход материала в некоторой зоне конструкции в пластическое состояние характеризуется скачкообразным понижением его жёсткости, что


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

приводит к уменьшению роста напряжений в этой зоне. Ситуацию иллюстрирует рисунок 4.8.

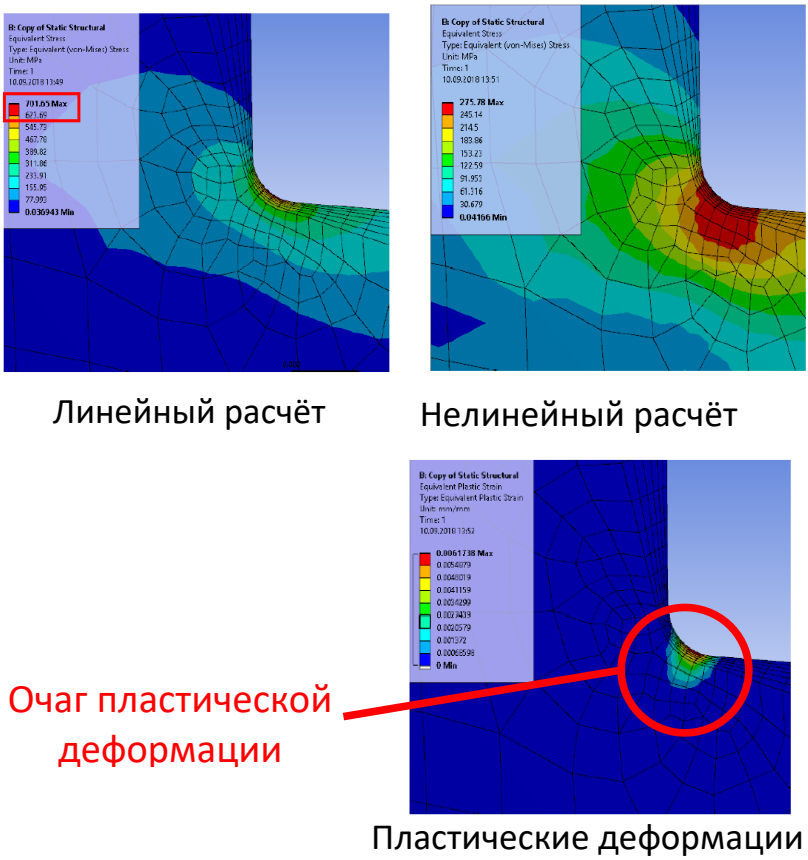



Рисунок 4.8 – Распределение эквивалентных напряжений в линейной и физически нелинейной постановках

*Контактная нелинейность* задача характеризуется наличием в модели контактного взаимодействия деталей, обеспечивающего не только взаимное непроникновение, но и проскальзывание и отсо-


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

единение контактирующих поверхностей. Пример нелинейной контактной задачи – расчёт резинового чехла рычага коробки передач автомобиля (рисунок 4.9).

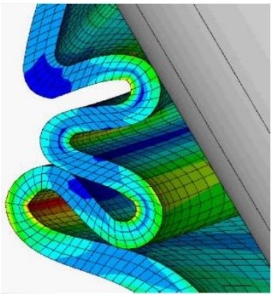


Рисунок 4.9 – Пример нелинейной контактной задачи

*Соединение деталей контактами и шарнирами*

С контактным взаимодействием деталей приходится иметь дело сразу, как только речь заходит о расчёте сборочных единиц. Для задания контакта необходимо указать так называемую «контактную» поверхность и «целевую» поверхность (рисунок 4.10).

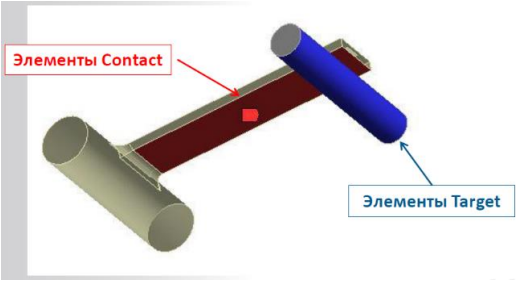



Рисунок 4.10 – Задание контактирующих поверхностей

В системе Ansys Mechanical доступны следующие типы контактов:

1) *bonded* (жёсткая связь): запрещает любое относительное перемещение контактирующих поверхностей;


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

2) *no separation* (без разделения): запрещает относительное перемещение по нормали к поверхностям, разрешая перемещение вдоль касательного направления (проскальзывание);

3) *frictionless* (без трения): запрещает взаимное проникновение поверхностей, разрешая образование зазоров и свободное проскальзывание;

4) *rough* (бесконечное трение): запрещает взаимное проникновение поверхностей и проскальзывание, разрешая лишь образование зазоров;

5) *frictional* (с трением): запрещает взаимное проникновение поверхностей, разрешая образование зазоров и проскальзывание с силой трения, определяемой посредством коэффициента трения, введённого пользователем.

Следует отметить, что контакты *bonded* и *no separation* являются линейными, тогда как *frictionless, rough* и *frictional* требуют нелинейного расчёта.

Для моделирования механизмов и расчёта их кинематики и динамики зачастую требуется шарнирное соединение звеньев с заданным набором степеней свободы. В Ansys Mechanical доступны следующие типы шарниров, представленных на рисунке 4.11.

Сравнение некоторых типов шарниров выполняется в рамках Лабораторной работы № 2.

Условия закрепления:

1) *Fixed Support* (жёсткая заделка): закрепляет все степени свободы выбранных объектов;

2) *Displacement* (перемещение): наложение заданных перемещений (в том числе, ненулевых);

3) *Elastic Support* (упругое основание): закрепление узлов но нормали к поверхности с заданной жёсткостью на растяжение-сжатие;

4) *Frictionless Support* (опора без трения): обеспечивает закрепление по нормали к поверхности;


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

5) *Cylindrical Support* (цилиндрическая опора): обеспечивает закрепление цилиндрических поверхностей по заданным степеням свободы в цилиндрической системе координат;

6) *Compression Only Support* (опора только на сжатие): работает как *frictionless*-контакт с абсолютно жёсткой поверхностью.

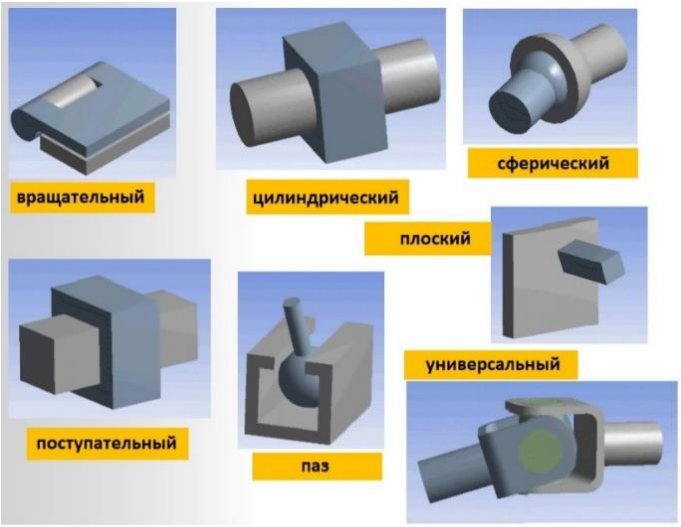



Рисунок 4.11 – Типы шарниров

Условия нагружения:

1) *Pressure* (давление): сила на единицу площади; прикладывается к поверхности;

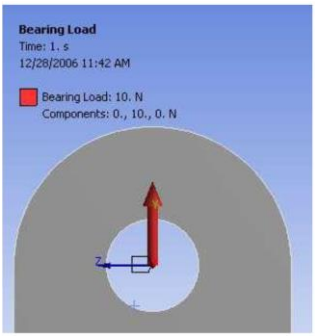
2) *Force* (сила): нагрузка, имеющая единицу силы; может прикладываться к вершинам, рёбрам, граням и телам;

3) *Bearing Load* (нагрузка от подшипника): имитация воздействия на цилиндрическое отверстие вставленной в него оси (рисунок). Хорошо подходит для нагружения проушин;

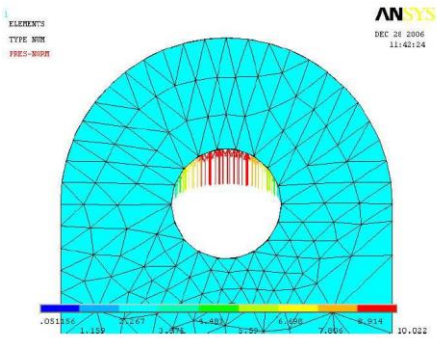
4) *Moment* (момент): прикладывает нагрузку в виде момента силы относительно заданной оси.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике




Приложение Bearing Load




Визуализация узловых сил

Рисунок 4.12 – Демонстрация нагрузки Bearing Load

### *Контрольные вопросы*

1. Запишите условие прочности для конструкций из типовых металлических материалов. Как вычисляются напряжения по Мизесу в двумерном случае?
2. Опишите основные алгоритмические процедуры МКЭ.
3. Какие Вы знаете способы визуализации результатов КЭ-расчёта?
4. Расскажите о типах нелинейностей, которые могут быть в КЭ-расчёте. Приведите примеры.
5. Какие типы контактов относятся к линейным, а какие – к нелинейным?
6. Подумайте, почему при нагружении отверстий проушин целесообразно задавать изменяющуюся вдоль дуги отверстия нагрузку (bearing load), а не постоянную?


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 5 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ANSYS ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрим пример расчета напряженно-деформированного состояния конструкций в системе ANSYS Workbench. Для построения трехмерных параметрических моделей может быть использован модуль ANSYS Design Modeler. Покажем типовые функции этого модуля на примере построения модели стержневой системы (рисунок 5.1) с использованием твердотельных элементов.

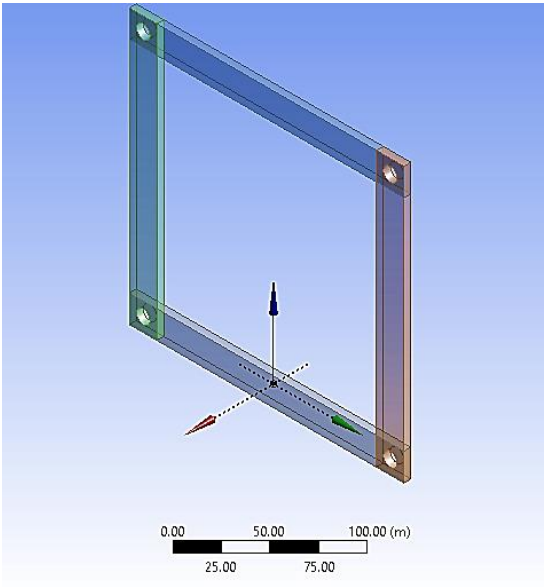



Рисунок 5.1 – Геометрическая модель исследуемой стрежневой системы


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Построение геометрической модели осуществляется с помощью контекстного меню раздела Geometry модуля Static Structural. Его можно открывать двойным щелчком на опцию Geometry. После выполнения этой команды Workbench запускает геометрический моделировщик Design Modeler. В рассмотренном примере размеры на чертежах указаны в миллиметрах, такие же размерности установлены при работе с программой.

Для построения модели необходимо первоначально создать эскиз повторяющегося элемента стержневой системы. Схема и размеры этого элемента показано на рисунке 5.2.

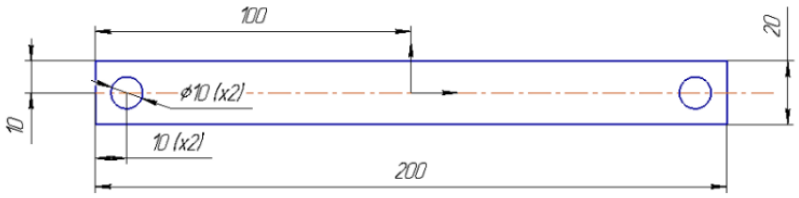



Рисунок 5.2 – Схема и размеры главного элемента стержневой системы

Для того, чтобы создать эскиз выделяется плоскость построения эскиза в дереве проекта и переходится в режим эскизирования (рисунок 5.3).

С помощью команд создания прямоугольника и круга может быть создан основной эскиз элемента. Рекомендуется создать прямоугольник в центре системы координат и окружности с центрами, лежащими на оси X. Далее, с помощью инструментов Dimensions задаются определённые значения расстояний, диаметров и длин в соответствии с рисунком 5.2. Автоматически, на левой стороне в разделе Details View создается новый параметр, значение которого можно изменить и ставить необходимое. Конечный эскиз с всеми заданными параметры представлен на рисунке 5.4.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

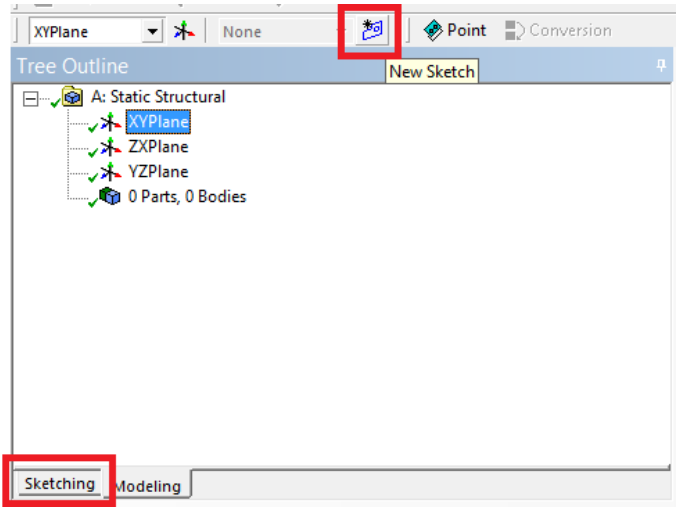



Рисунок 5.3 – Создание нового эскиза и переход в режим эскизирования

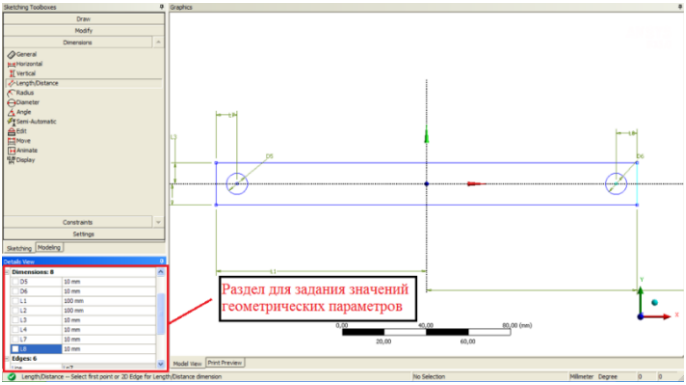



Рисунок 5.4 – Задание значений геометрических параметров эскиза

Окончательный эскиз может быть получен с помощью операции выдавливания Extrude. Модуль Extrude позволяет пользователю задать вид и толщину выдавливания. В этом случае, выбираются Frozen и 5 mm, соответственно (рисунок 5.5).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

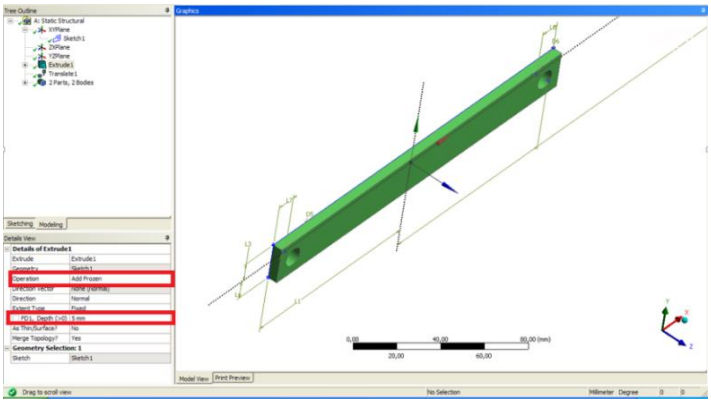


Рисунок 5.5 – Выдавливание исходного элемента

Далее, так как остальные элементы стержневой конструкции одинаковы, с помощью команд сдвига и поворота можно достроить геометрическую модель. Сначала, для построения верхнего элемента применяется команда сдвига Translate с заданием расстояния сдвига 180 мм и с сохранением исходного тела (рисунок 5.6).

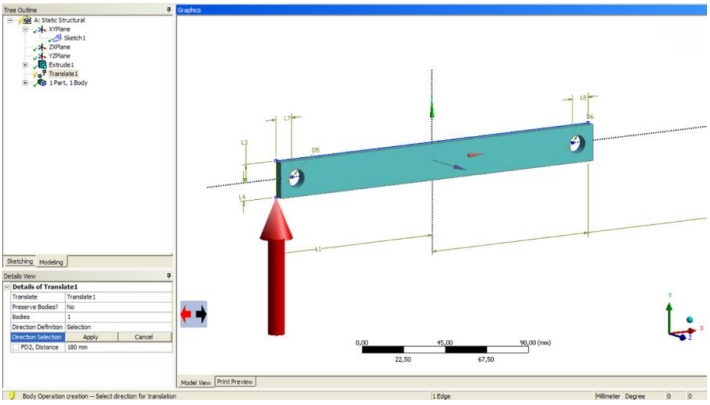


Рисунок 5.6 – Смещение исходного элемента



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Для создания бокового элемента применяется команда Rotate. В качестве оси вращения выбирается ось, проходящая через левое отверстие исходного элемента (рисунок 5.7). Также, задается угол поворота 90° и сохраняется исходное тело (Preserve Body? – Yes).

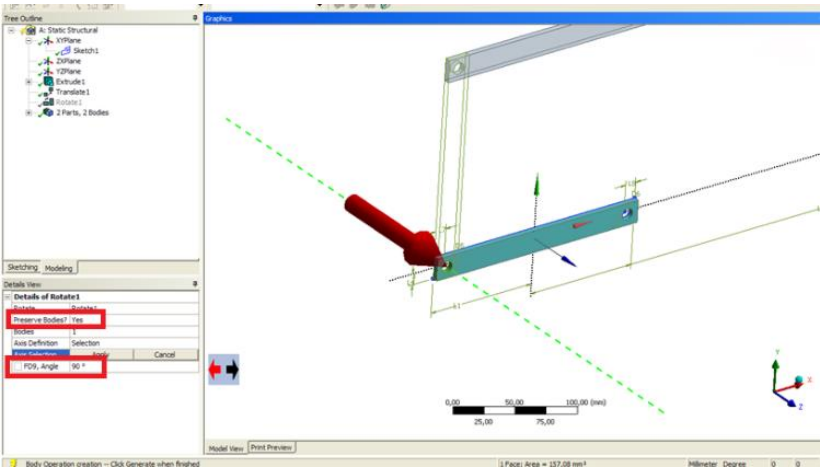



Рисунок 5.7 – Поворот исходного элемента

Аналогичным образом выполняется создание оставшегося бокового элемента с помощью команд паралельного переноса при использовании первого бокового элемента как исходное тело, расстоянии 180 мм, направлении вдоль оси X и сохранении исходного тела.

*Соединение элементов конструкций с использованием шарниров*

После создания геометрии конструкции необходимо сохранить проект и прейти в ANSYS Mechanical, выбрав ячейку Mesh в системе Static Structural.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Для соединения элементов конструкции рассмотрим создание шарниров. Выделение в дереве проекта позиции *Connections* открывает соответствующее нижнее меню. Для создания фиксированного соединения создается *Joint*. Дальше, для верхнего ребра выделяется в качестве *Reference Body* выделяется левая поверхности отверстия and *Mobile Body* – правая поверхности отверстии тел, входящих в соединении, как и показано на рисунке 5.8. Для остальных соединений, выделяются только поверхности отверстий тел, входящих в соединение.

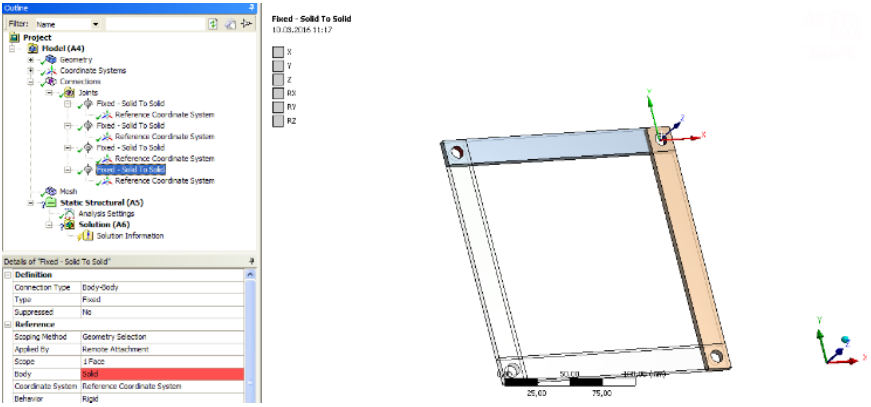



Рисунок 5.8 – Установление фиксированного соединения

*Закрепление детали и задание действующей на нее силы*

Для того, чтобы закрепить конструкцию применяется опция жесткой заделки Fixed Support на нижней поверхности стержневой системы (рисунок 5.9).

Для задания действующей силы применяется опция Force, определяемой для правой поверхности верхнего ребра конструкции (рисунок 5.10). Величина силы для рассматриваемого примера составляет 10 000 Н.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

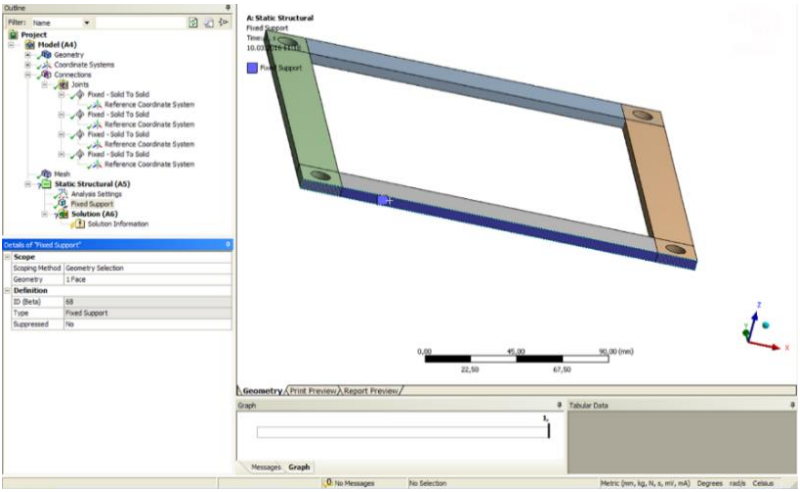


Рисунок 5.9 – Закрепление конструкции

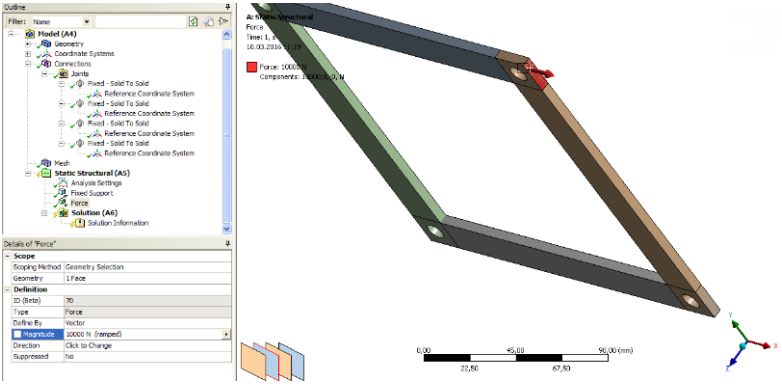


Рисунок 5.10 – Задание действующей на конструкцию силы

*Решение задачи и анализ результатов*

При выделении в дереве проекта позиции *Solution* открывается соответствующее верхнее меню этого раздела.



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Программа *Mechanical* дает пользователю возможность выбрать какие физические величины необходимо вычислить при решении задачи. Для данной работы будут исследоваться эквивалентное напряжение и деформация конструкции. Для этого, выбирается опцию эквивалентных напряжений: Solution < Stress < Equivalent (von-Mises) и деформированное состояние конструкции Solution < Deformation < Total.

Запуск на решение осуществляется командой *Solve* верхнего экранного меню или из контекстного меню раздела *Solution*. Выполненное решение обозначается зеленым символом рядом с разделом *Solution* в дереве проекта. Результаты решения доступны в разделе Solution. Просмотр выбранных величин доступен сразу же после выполнения расчета. Примеры ожидаемых результатов показаны на рисунке 5.11.

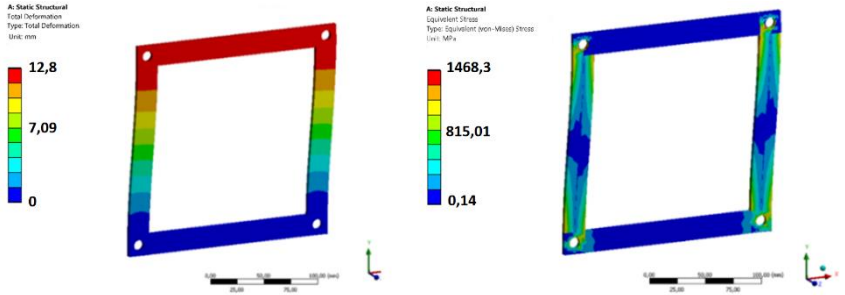



Рисунок 5.11 – Эквивалентные напряжения и полные перемещения в конструкции

Для оценки влияния параметров шарнира на решения задачи проведено сравнение результатов решения с использованием фиксированных шарниров и шарниров, допускающих вращение в верхнем ребре конструкции. Для этого выделяется в дереве проекта позицию *Connections* и открывается соответствующее соединения


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

верхнего ребра. Как показано на рисунке 5.12 в разделе *Definitions* меняется вид (*Type*) на шарнир (*Revolute*) для обеих соединений.

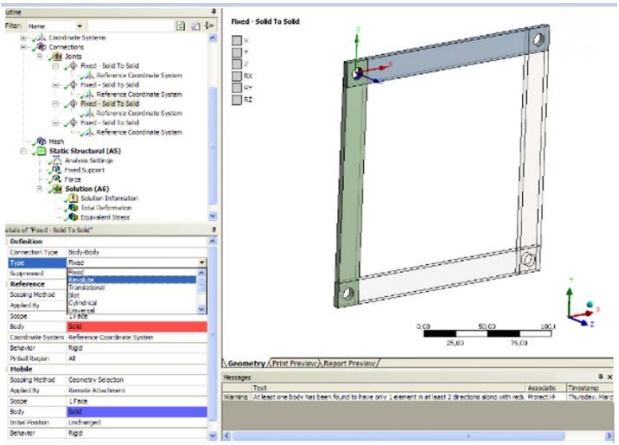


Рисунок 5.12 – Изменение вида соединений

Аналогичным образом, как и для первого случая, запуск на решение осуществляется командой *Solve* верхнего экранного меню или из контекстного меню раздела *Solution*. При правильном изменении параметров, ожидаемые результаты должны выглядеть как на рисунке 5.13.

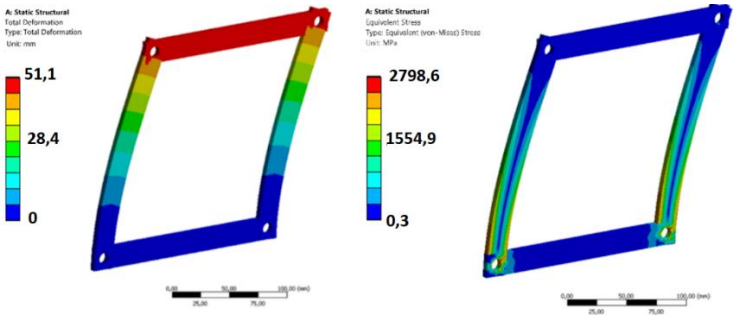



Рисунок 5.13 – Эквивалентные напряжения и деформации после изменения вида соединения


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Настройка расчетной сетки и влияние размеров элементов на результат решения*

Для предыдущих рассматриваемых случаев, сетка МКЭ была построена автоматически. Однако, пользователь проводить измельчение КЭ компьютерной модели для повышения точности вычислений и точного моделирования состояния конструкции.

В качестве примера на данной работе проводится улучшение сетки в одном из узлов конструкции. Необходимо первоначально создать новую систему координату, центрированную в центре левого нижнего отверстия, путем ее создания в разделе *Coordinate Systems*. Дальше выбирается соответствующую поверхность отверстия.

Для улучшения сетки, выделяется в дереве проекта позицию *Mesh (*сетка*)* и применяется метод *Body Sizing*. Дальше выбирается тип *Sphere of Influence*, в котором за тело выделяется нижнее ребро и за центр – ранее созданную систему координат. Радиус можно указать равным примерно 30 мм. Нажимается *Generate* для обновления сетки (рисунок 5.14).

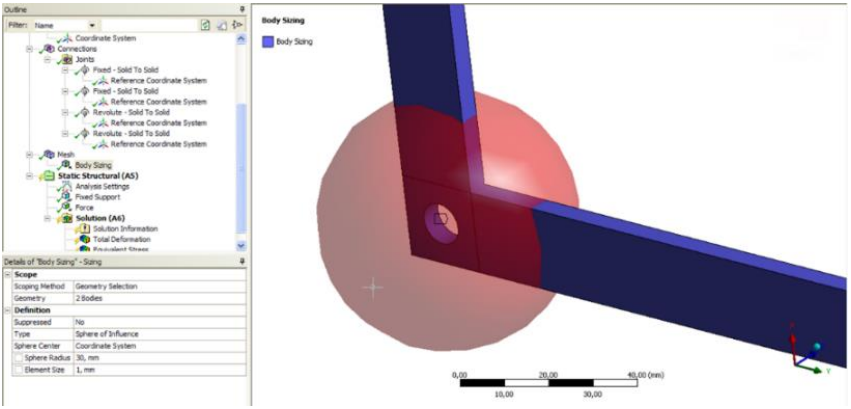



Рисунок 5.14 – Настройка сетки в одном из узлов конструкции


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Аналогичным образом, как и для предыдущих случаев, запуск на решение осуществляется командой *Solve* верхнего экранного меню или из контекстного меню раздела *Solution*. Эквивалентные напряжения после настройки размеров элементов сетки представлены на рисунке 5.15.

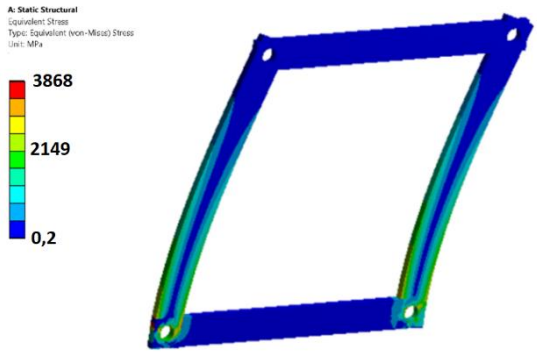



Рисунок 5.15 – Эквивалентные напряжения
после настройки элементов расчетной сетки

В результате работы получены разные результаты напряженного состояния конструкции при разных видах соединения. Результаты показывают, как при применении шарнирного соединения деформация системы увеличивается и в общем изменяется характер напряженного состояния системы. Выбор правильного вида соединения является очень важным шагом моделирования любой конструкции и для построения верного (настолько, чтобы получить почти стопроцентное совпадение с экспериментом) количественного результата требуются знания многих аспектов конструкции и точного характера соединения их элементов.

Также было изучено влияние, которое оказывают размеры элементов расчетной сетки на результаты моделирования.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

### *Контрольные вопросы*

1. С применением какого модуля осуществляется построение трехмерных параметрических моделей?

2. Опишите коротко основные этапы построения прочностной модели в ANSYS Mechanical.

3. Какой метод применяется для настройки расчётной сетки?



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 6 РАСЧЁТ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Общая характеристика слоистых композитов. Особенности задания ортотропных свойств материалов в CAE-системе. Особенности построения конечно-элементных моделей из слоистых КМ. Свойства материалов. Критерии прочности конструкций из КМ.*

Композиционный материал (КМ) – многокомпонентная система, характеризуемая макроскопической неоднородностью состава. Примером композиционного материала является железобетон: хрупкий цементный раствор, армированный щебнем и стальной арматурой отличается высокой прочностью, жёсткостью и пластичностью.

В авиастроении широкое применение находят слоистые угле- и стеклопластики вследствие их высокой удельной прочности и жёсткости (рисунок 6.1).




Рисунок 6.1 – Материалы современного пассажирского самолёта



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Слоистые КМ состоят из набора связанных друг с другом слоёв, образованных связующим (матрицей) и *армирующими* волокнами (рисунок 6.2).

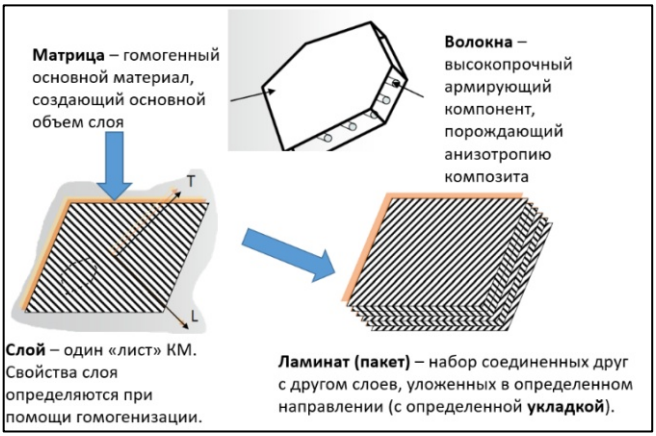



Рисунок 6.2 – Структура слоистого КМ

Примеры самолётных конструкций из слоистых КМ приведены на рисунке 6.3.



Кессон крыла [12]



Киль [13]



Панель фюзеляжа [14]

Рисунок 6.3 – Примеры самолётных конструкций из слоистых КМ



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Вследствие структурной неоднородности, композитам присуща анизотропия жёсткостных и прочностных свойств. Это требует особых подходов к построению математических моделей таких конструкций. В частности, поведение угле- и стеклопастиков, как правило, описывается ортотропной моделью материала, требующей задания в трёхмерном случае 9 упругих констант: 3 модуля упругости по трём осям, 3 модуля сдвига и 3 коэффициента Пуассона по трём плоскостям. Закон Гука для ортотропного материала записывается в виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}. \qquad (6.1)$$

В двумерном случае имеем 3 компоненты напряжений и деформаций, поэтому система уравнений упрощается:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}}_{\text{обратная матрица упругих постоянных } \mathbf{\Phi}_0} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \qquad (6.2)$$



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Формулы выше приведены для системы координат слоя: в ней ось *1* (ось *L* или ось *x*) направлена вдоль направления армирования, ось *2* (ось *T* или ось *y*) направлена поперёк направлению армирования и ось *3* (или ось *z*) направлена поперёк плоскости слоя (рисунок 6.4).

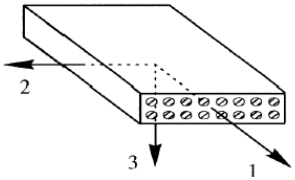



Рисунок 6.4 – Система координат слоя

Свойства материала задаются в системе координат слоя, которая задаётся пользователем для каждого элемента (разумеется, этот процесс в современных препроцессорах в той или иной степени автоматизирован). В системе Ansys Composite PrePost направление *1* системы координат слоя называется Reference Direction, а в системе Femap – Material Direction. В ходе расчёта, программа преобразует матрицу упругости материала из системы координат слоя в глобальную систему координат. Для двумерного материала это преобразование записывается в виде [16]:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{T}^T \mathbf{\Phi}_0 \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица поворота:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Угол $\theta$ задаёт ориентацию системы координат слоя относительно глобальной системы (рисунок 6.5).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

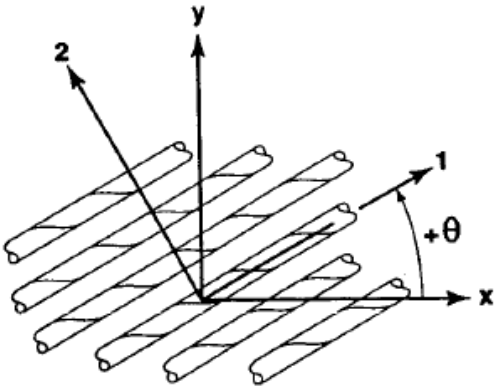



Рисунок 6.5 – Угол ориентации слоя

*Особенности построения конечно-элементных моделей из слоистых КМ*

Для моделирования конструкций из слоистых композитов можно использовать оболочечные или твердотельные конечные элементы. Первые рекомендуется использовать для тонкостенных конструкций, когда отношение толщины к габаритным размерам оболочки не больше 1:10. Твердотельные элементы уместно использовать в областях с существенно трёхмерным напряжённым состоянием (например, в зоне Т-образного соединения или в местах, где нельзя пренебречь напряжениями, нормальными к срединной поверхности – рисунок 6.6) и большой толщиной.

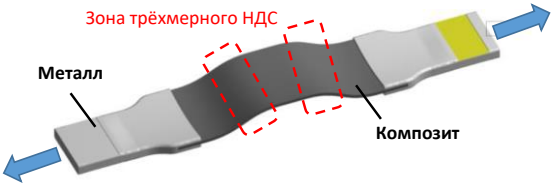



Рисунок 6.6 – Пример изделия из слоистых КМ,
где оправдано применение твердотельных элементов


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Для задания жёсткостных свойств элементов необходимо определить укладку – набор слоёв с заданным материалом, толщиной и углом ориентации. Свойства материала и угол ориентации задаются в системе координат слоя. Система конечно-элементного анализа автоматически переводит все матрицы в глобальную систему координат и формирует матрицы упругости и матрицы жёсткости элементов, характеризующихся, в общем случае, анизотропным поведением.

Процедура формирования матрицы жёсткости мембранной составляющей слоистого элемента основывается на суммировании матриц жёсткости слоёв с весовыми коэффициентами, пропорциональными толщине слоя:

$$\mathbf{k}_e = \frac{1}{T}\sum t_i \mathbf{k}_i \ ,$$

где $t_i$ – толщина *i*-го слоя,

$T$ – суммарная толщина элемента.

Трёхслойные конструкции можно моделировать двумя способами. Первый способ основан на представлении «трёхслойки» в виде КЭМ из оболочечных слоистых элементов, где заполнитель представлен в виде слоя с соответствующей ему толщиной и материалом. Второй способ более подробен и состоит в построении комбинированной модели из оболочечных (несущие слои) и твердотельных элементов (заполнитель) – см. рисунок 6.7.

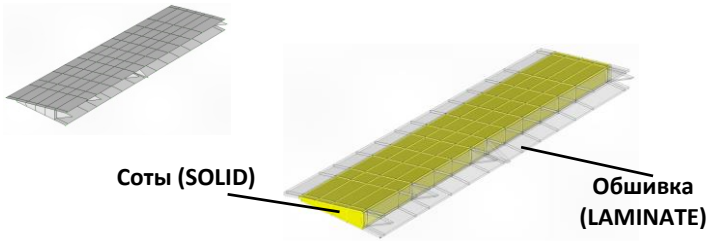



Рисунок 6.7 – КЭМ интерцептора с сотовым заполнителем


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Типовые свойства материалов*

Приведём характерные свойства материалов (таблица 6.1), которые могут использоваться в качестве расчёта первого приближения для композитных конструкций. Следует отметить, что жёсткостные и прочностные свойства угле- и стеклопластиков сильно зависят от параметров технологического процесса. Поэтому приведённые ниже свойства носят ориентировочный характер.

Таблица 6.1. **Ориентировочные механические характеристики типовых КМ**

| | **Тканевый эпоксидный углепластик** | **Тканевый однонаправленный стеклопластик** | **Сотовый заполнитель** |
|---|---|---|---|
| *жёсткость* | | | |
| $E_1$, МПа | 61340 | 45000 | 1 |
| $E_2$, МПа | 61340 | 10000 | 1 |
| $E_3$, МПа | 6900 | 10000 | 255 |
| $\mu_{12}$ | 0,04 | 0,3 | 0,49 |
| $\mu_{23}$ | 0,3 | 0,4 | 0,001 |
| $\mu_{13}$ | 0,3 | 0,3 | 0,001 |
| $G_{12}$, МПа | 3300 | 5000 | $10^{-6}$ |
| $G_{23}$, МПа | 2700 | 3800 | 37 |
| $G_{13}$, МПа | 2700 | 5000 | 70 |
| *прочность* | | | |
| $[\sigma_{1+}]$, МПа | 805 | 1100 | $10^{-10}$ |
| $[\sigma_{2+}]$, МПа | 805 | 35 | $10^{-10}$ |
| $[\sigma_{3+}]$, МПа | 50 | 35 | 5,3 |
| $[\sigma_{1-}]$, МПа | -509 | -675 | $-10^{-10}$ |
| $[\sigma_{2-}]$, МПа | -509 | -120 | $-10^{-10}$ |
| $[\sigma_{3-}]$, МПа | -170 | -120 | -5,3 |
| $[\tau_{12}]$, МПа | 125 | 80 | $10^{-10}$ |
| $[\tau_{2+}]$, МПа | 65 | 45 | 1,2 |
| $[\tau_{3+}]$, МПа | 65 | 80 | 2,2 |
| *физические свойства* | | | |
| $\rho$, т/мм$^3$ | $1{,}45\cdot10^{-9}$ | $2\cdot10^{-9}$ | $8\cdot10^{-11}$ |


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Заметим, что для композиционных материалов характерно отличие пределов прочности на растяжение и сжатие. Более того, нередко встречается и различная жёсткость на растяжение и сжатие. Учёт последнего эффекта требует привлечения итерационных методов расчёта, т.к. жёсткость конструкции в этом случае оказывается функцией деформаций.

Наиболее прямой путь получения достоверных механических характеристик, необходимых для проведения расчёта, состоит в проведении стандартизованных экспериментальных исследований. Однако ввиду дороговизны этого способа, разрабатываются аналитические методы для прогнозирования свойств композиционных материалов на основе свойств компонентов. Эти методы можно отнести к теории гомогенизации. Простейшим подходом для однонаправленных армированных пластиков является так называемое «правило смесей» [15]:

$$E_1 = E_f\varphi + E_m\left(1-\varphi\right),$$
$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f\left(1-\varphi\right) + E_m\varphi},$$
$$\mu_{12} = \mu_f\varphi + \mu_m\left(1-\varphi\right)$$
$$G_{12} = \frac{G_m G_f}{G_f\left(1-\varphi\right) + G_m\varphi}$$

где индексом «f» помечены величины, относящиеся к волокну, индексом «m» – к матрице. $\varphi$ – объёмная доля волокна.

*Критерии прочности конструкций из КМ*

Под критерием прочности понимается некоторая функция $\varphi$ компонент тензора напряжений σ, деформаций ε, а также их допускаемых значений в главных осях материала:

$$\varphi = \varphi\left(\sigma_1, \sigma_2, \left[\sigma_1\right], \left[\sigma_1\right], \tau_{12}, \left[\tau_{12}\right], \varepsilon_1, \left[\varepsilon_1\right], \ldots\right).$$


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Значение этой функции (называемой иногда *индексом разрушения*) используется для анализа несущей способности элемента конструкции путём с равнения её значения с некоторым числом (как правило, с единицей). Например, условие прочности в 2D по критерию Мизеса

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau_{12}^2} \le [\sigma]$$

равносильно условию $\dfrac{\sigma_{\text{экв}}}{[\sigma]} \le 1.$

То же самое можно записать и в терминах «критерия прочности Мизеса»:

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{[\sigma]}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{[\sigma]}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{[\sigma]}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau_{12}}{[\sigma]}\right)^2} \le 1.$$

Для анизотропных композиционных материалов теория Мизеса, как правило, не используется. Вместо неё находят применение другие теории, приведённые ниже. Достижение индекса разрушения $\varphi$ значения 1 в некотором элементе конструкции говорит о начале разрушения этого элемента. Отметим, что вся конструкция при этом ещё не теряет несущей способности. При проектировании по разрушающим нагрузкам, как это принято в авиастроении, данный фактор необходимо учитывать во избежание перетяжеления конструкции.

Рассмотрим теории прочности композитов, доступные в системе Femap/Nastran.

***Теория Хилла***

$$\varphi = \left(\frac{\sigma_1}{[\sigma_1]}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{[\sigma_1]^2} + \left(\frac{\sigma_2}{[\sigma_2]}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{[\tau_{12}]}\right)^2.$$


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Это обобщение теории Мизеса на случай ортотропных материалов. Следует обратить внимание на то, что теория Хилла не делает различия в прочности материала на растяжение/сжатие.

***Теория Хоффмана***

$$\varphi=\left(\frac{1}{[\sigma_{1+}]}-\frac{1}{[\sigma_{1-}]}\right)\sigma_1+\left(\frac{1}{[\sigma_{2+}]}-\frac{1}{[\sigma_{2-}]}\right)\sigma_2+\frac{\sigma_1^2}{[\sigma_{1+}][\sigma_{1-}]}+\frac{\sigma_2^2}{[\sigma_{2+}][\sigma_{2-}]}+\frac{\tau_{12}^2}{[\tau_{12}]^2}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{[\sigma_{1+}][\sigma_{1-}]}.$$

Теория Хоффмана принимает в учет разницу между допускаемыми напряжениями растяжения и сжатия.

***Теория Цая-Ву***

$$\varphi=F_1\sigma_1+F_2\sigma_2+F_{11}\sigma_1^2+F_{22}\sigma_2^2+2F_{12}\sigma_1\sigma_2+F_{66}\tau_{12}^2.$$

где

$$F_1=\frac{1}{[\sigma_{1+}]}-\frac{1}{[\sigma_{1-}]},\qquad F_2=\frac{1}{[\sigma_{2+}]}-\frac{1}{[\sigma_{2-}]},$$

$$F_{11}=\frac{1}{[\sigma_{1+}][\sigma_{1-}]},\qquad F_{22}=\frac{1}{[\sigma_{2+}][\sigma_{2-}]},\qquad F_{66}=\frac{1}{[\tau_{12}]^2}.$$

Величина $F_{12}$ удовлетворяет условию $F_{11}F_{22}-F_{12}^2>0$ и определяется экспериментально.

***Теория максимальных напряжений***

$$\varphi=\max\left\{\left|\frac{\sigma_{1\pm}}{[\sigma_{1\pm}]}\right|,\left|\frac{\sigma_{2\pm}}{[\sigma_{2\pm}]}\right|,\left|\frac{\tau_{12}}{[\tau_{12}]}\right|\right\}.$$

Теория максимальных напряжений позволяет идентифицировать моду разрушения. Если максимальным является отношение напряжения по волокну к допускаемому напряжению – значит, разрушение начнётся с волокна. Если максимально отношение поперечной к волокну компоненты напряжений к допускаемому значению – значит разрушение начнётся со связующего. Сдвиговая


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

составляющая прочности также в большей степени обеспечивается связующим.

Критерий максимальных напряжений используется в Nastran для вычисления индекса прочности межслоевого сдвига $\varphi_{\text{il}}$ («il» – interlaminar):

$$\varphi_{\text{il}} = \frac{\max\left\{\left|\tau_{13}\right|,\left|\tau_{23}\right|\right\}}{\left[\tau_{\text{il}}\right]}.$$

Отметим, что для вычисления индексов прочности в системе Femap/Nastran необходимо задать все допускаемые напряжения материала, включая прочность межслоевого сдвига $\left[\tau_{\text{il}}\right]$.

### *Контрольные вопросы*

1. Назовите преимущества от использования КМ в самолётных конструкциях.
2. Поясните понятие «система координат слоя».
3. Когда необходимо применять оболочечные элементы для моделирования конструкций из КМ, а когда твердотельные?
4. Можно ли по свойствам компонентов спрогнозировать свойства составленного из них КМ?
5. Расскажите о теориях прочности КМ.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 7 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ FEMAP/NASTRAN ДЛЯ РАСЧЁТА КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для освоения принципов построения конечно-элементной модели расчёта трёхслойных конструкций из композиционных материалов рассмотрим пример двухопорной балки, нагруженной равномерно распределенной по ширине силой и расположенной вдоль линии посередине пролёта.

*Построение геометрической модели*

Геометрическая модель определяется с помощью замкнутого контура в виде прямоугольника со сторонами 200 мм × 50 мм, который может быть создан командой Geometry – Curve – Rectangle и имеет вид плоской поверхности, задаваемой командой Geometry – Boundary Surface. Для более наглядной визуализации «boundary surface» можно конвертировать в обычную поверхность командой Geometry – Surface – Convert. Для точного позиционирования узлов строго посередине поверхности, создадим её разрез трансверсальной плоскостью при помощи команды Geometry – Solid – Slice. Результат показан на рисунке 7.1.

*Создание модели материала*

Свойства материала вводятся посредством меню Model – Material. По кнопке Material Type может быть выбран тип материала – Orthotropic (2D), где могут быть введены свойства материала для несущих слоёв и заполнителя (рисунок 7.2).



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

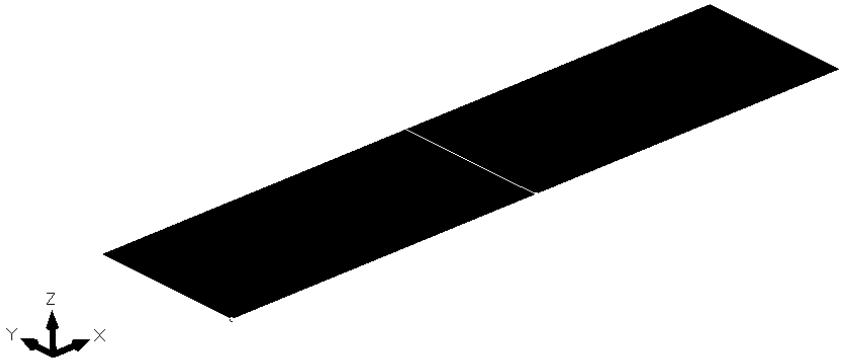



Рисунок 7.1 – Геометрическая модель задачи

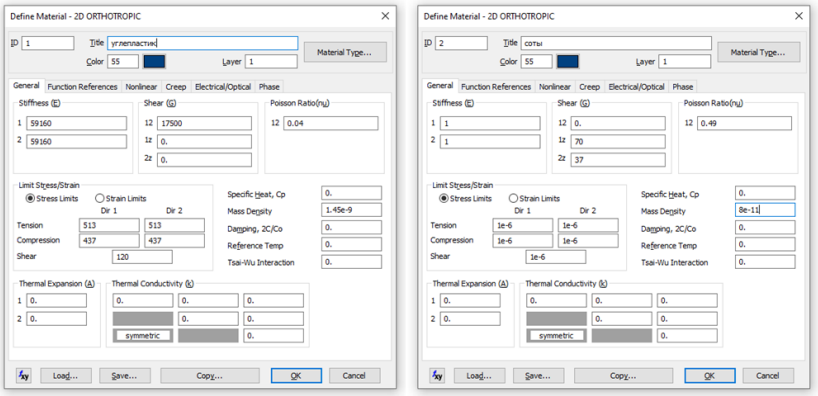



Рисунок 7.2 – Свойства материала несущих слоёв (слева)
и заполнителя (справа)

*Создание укладки слоёв*

Укладка создаётся посредством меню Model – Layup. В нашем случае она будет стоять из 5 слоёв: 2 несущих слоя углепластика по 0.25 мм с каждой стороны и 1 слой сотового заполнителя толщиной 10 мм (рисунок 7.3). Все слои ориентированы под нулевым углом.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

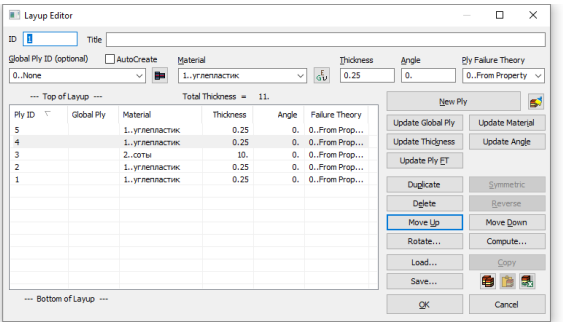



Рисунок 7.3 – Укладка слоёв

*Выбор типа элементов и задание их свойств*

В данной задаче используются элементы типа LAMINATE (слоистые изгибно-мембранные элементы произвольной оболочки). Создание свойств элементов осуществляется командой Model – Property. По кнопке Elem/Proprty Type указывается тип Laminate. В выпадающем списке Laminate Definition выбирается укладка. В разделе Laminate Properties задаётся параметр BondShr Allow 1.7 МПа – предел прочности укладки на межслоевой сдвиг. Выбирается теория прочности – Max Strain. В действительности будет использоваться теория максимальных напряжений, т.к. в свойствах материала заданы именно допускаемые напряжения.

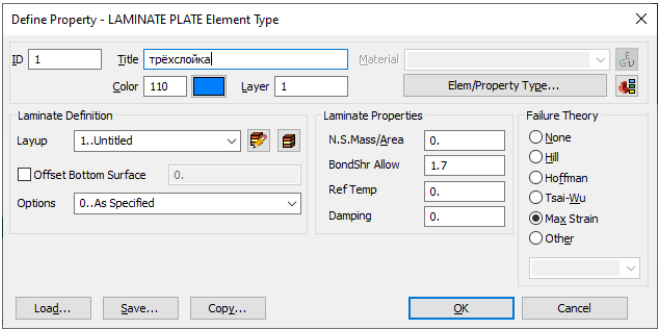



Рисунок 7.4 – Ввод свойств элемента


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Построение сетки КЭ*

Размер элементов сетки на поверхности в рассматриваемом примере задан командой Mesh - Mesh Control – Size on Surface равным 10 мм. Построение сетки КЭ осуществляется командой Mesh – Geometry – Surface (рисунок 7.5).

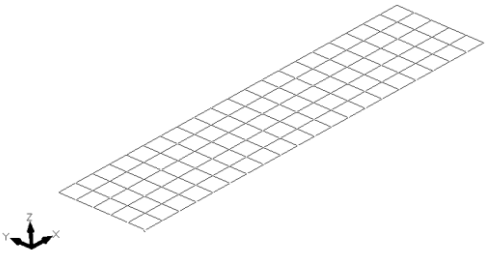


Рисунок 7.5 – Сетка КЭ

Направление отсчёта углов для укладки слоёв определяется при помощи команды Modify – Update Element – Material Orientation. В качестве направления (Material Angle) может быть выбрано положительное направление оси X.

*Задание нагрузок и закреплений*

Закрепления создаются командой Model – Constraint. Будем задавать их напрямую на узлы (Nodal). Нагрузку также будет прикладывать к узлам командой Model – Load – Nodal. Итоговая модель с нагрузками и закреплениями показан на рисунке 7.6.

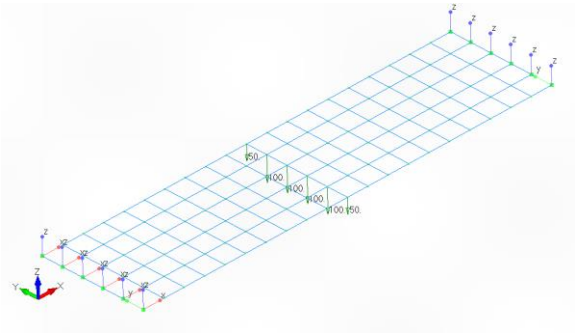


Рисунок 7.6 – КЭМ с нагрузками и закреплениями



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Заметим, что узловая сила  на крайних узлах (50 Н) в 2 раза меньше, чем во внутренних (100 Н). Суммарная сила 4×100 + 50×2 = = 500 Н.

*Запуск расчёта*

Создаём настройки статического расчёта командой Model – Analysis. Запускаем расчёт командой File – Analyze.

*Визуализация и анализ результатов*

Выведем результаты расчётов по нажатию на кнопку Post Data . В выпадающем списке доступны напряжения и индексы прочности по каждому слою (рисунок 7.7). Кроме этого, доступна огибающая индекса прочности по всем слоям (вектор результатов 6060...Laminate Max Failure Index).

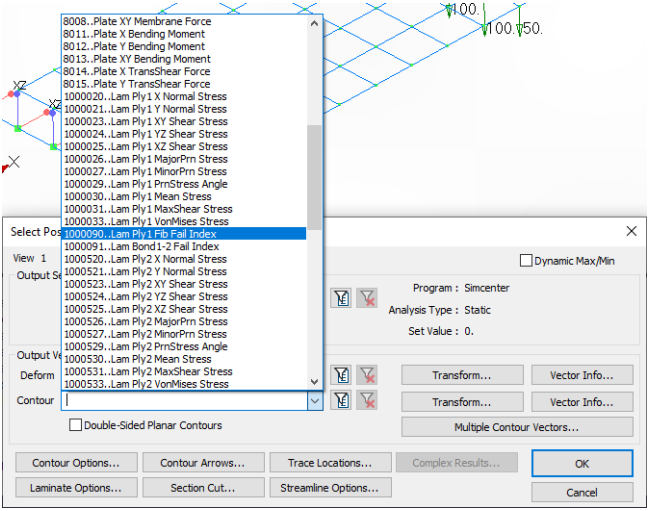



Рисунок 7.7 – Результаты расчёта слоистой КЭМ

В частности, выведем картину прогибов (рисунок 7.8) и максимальных индексов разрушения по всем слоям (рисунок 7.9).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

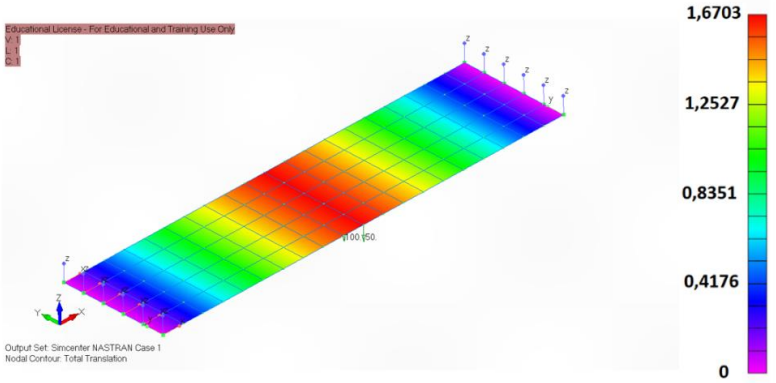
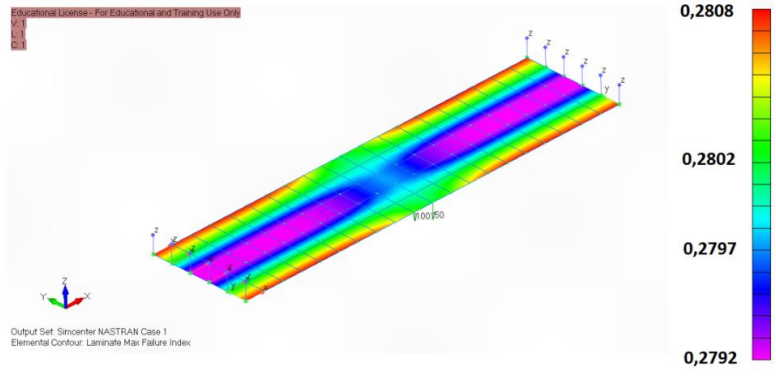



Рисунок 7.8 – Суммарные перемещения в модели




3

Рисунок 7.9 – Максимальное значение индекса разрушения по слоям

Анализ показывает, что предельное напряжённое состояние реализуется по трансверсальному сдвигу, т.е. определяющей для несущей способности данной балки выступает прочность заполнителя на сдвиг (максимальный индекс прочности в несущих слоях 0,18).

Проверим равновесие в модели по усилиям в несущих слоях. Выведем значение нормальных напряжений вдоль оси X («по волокну») в несущих слоях (рисунок 7.10).



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

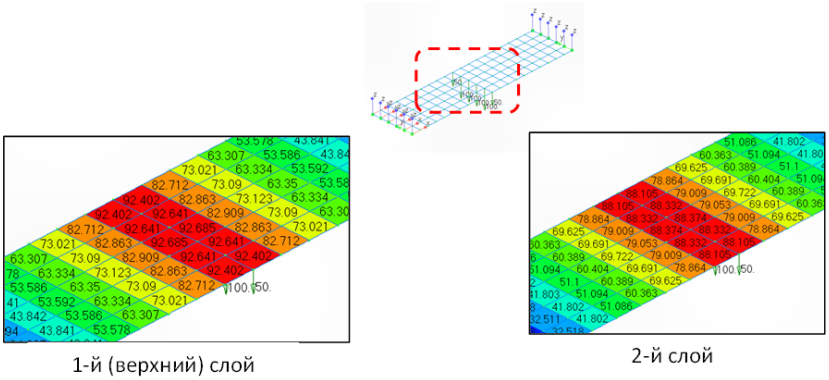



Рисунок 7.10 – Нормальные напряжения вдоль оси X в несущих слоях

Максимальные нормальные напряжения возникают посередине пролёта. Среднее их значение по толщине обшивки составляет $0,5\cdot(92,4+88,1)=90,25$ МПа. С учётом толщины обшивки (0,5 мм) и ширины балки (50 мм) получим нормальное усилие в обшивке $N=90,25\cdot 0,5\cdot 50=2256,25$ Н. В нижней обшивке возникает точно такая же по величине сила. Расстояние между серединами верхней и нижней обшивок (строительная высота) равно высоте балки за вычетом двух полутолщин обшивок и составляет величину $H=11-2\cdot 0,25=10,5$ мм. Таким образом, в середине пролёта, согласно МКЭ-модели, реализуется изгибающий момент $M_{\text{МКЭ}}=N\cdot H=2256,25\cdot 10,5=23690,63$ Н·мм.

С другой стороны, согласно балочной теории, изгибающий момент посередине пролёта двухопорной балки, нагруженной сосредоточенной силой, равен $M_{\text{бал}}=(1/4)P\cdot L=(1/4)\cdot 500\cdot 200=25000$ Н·мм. Таким образом, отклонение численного расчёта по МКЭ от классического «балочного» результата относительно последнего составляет порядка 5%, что представляется удовлетворительным результатом.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

### *Контрольные вопросы*

1. Опишите этапы задания укладки слоев композиционного материала.

2. Опишите какие результаты можно получить в результате расчета конструкций из слоистых композиционных материалов с использованием системы FEMAP/NASTRAN.

3. Как проверить равновесие в модели?



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 8 ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

*Понятие силовой схемы. Постановка задачи топологической оптимизации. Алгоритм поиска конструкции наибольшей жёсткости. Понятие силовой схемы детали в терминах функции плотности*

Рассмотрим задачу проектирования «плоской» детали, для которой места приложения сил и закрепления лежат в одной плоскости (рисунок 8.1). Такая постановка характерна для учебной задачи по курсу «Конструирование самолётов», однако нередко встречается и в практической работе.

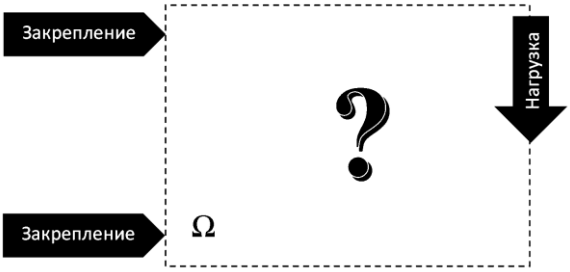



Рисунок 8.1 – Проектная ситуация для проектирования детали

На рисунке выше пунктиром обозначена область пространства **Ω** – геометрические ограничения – в которую нужно «вписать» кронштейн. Эта область определяется, как правило, из компоновочных соображений. Под *силовой схемой* в дальнейшем будем пони-


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

мать закон распределения конструкционного материала в Ω. Силовую схему также называют *топологией* (греч. τόπος «место» и λόγος – «изучаю») конструкции. Придадим этому определению более математический характер. Для этого зададим на области Ω функцию координат $\rho: \mathbb{R}^3 \mapsto \{0,1\}$, множество значений которой состоит всего из *двух* чисел: 0 и 1. Функцию $\rho = \rho(x, y, z)$ при этом следует интерпретировать как *относительную плотность* материала (безразмерную величину) в точке пространства Ω с координатами $x, y, z$. Для плоской задачи имеем, соответственно, только две координаты. Это означает, что если в данной точке $\rho$ равна единице, то материал в этой точке «должен присутствовать», если равна нулю – то не должен. Задание функции $\rho$ в области пространства, соответствующей геометрическим ограничениям на проектирование детали, *однозначно* определяет силовую схему последней.

Заметим, что плотность – искусственно введенная величина, поскольку не входит в уравнения теории упругости при отсутствии массовых сил, например, инерционных. Поэтому необходимо постулировать некоторую связь между жесткостными свойствами системы – модулем упругости – и плотностью. Простейшей гипотезой является бинарная зависимость вида

$$E(\rho) = \begin{cases} E_0, \rho = 1, \\ 0, \rho = 0. \end{cases}$$

Такой подход приводит к трудностям при построении эффективного алгоритма поиска функции плотности, поскольку бинарная зависимость $E(\rho)$ является недифференцируемой. Поэтому на практике часто используется следующая зависимость [16]:

$$E(\rho) = \rho^p E_0,$$


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

где $p \geq 1$ – коэффициент пенализации, $E_0$ – модуль упругости исходного материала.

Отметим, что концепция использования тела с переменной по объёму жёсткостью для поиска оптимальных силовых схем восходит к работам [17] и [18].

Приведём примеры распределения плотностей:

– шарнирно опертая балка, нагруженная в середине пролета (рисунок 8.2);

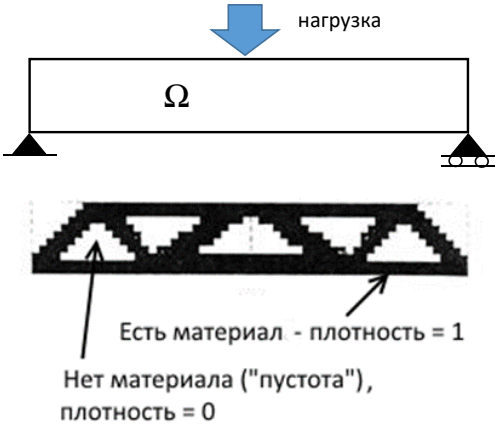



Рисунок 8.2 – Распределение плотности в шарнирно опёртой балке

– плоский кронштейн (рисунок 8.3);

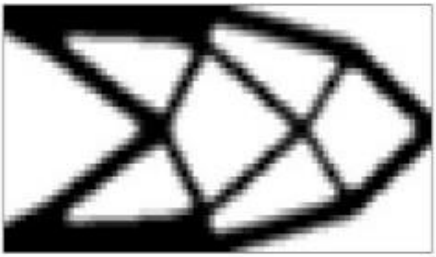


Рисунок 8.3 – Распределение плотности в плоском кронштейне



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

– качалка в трёхмерной постановке (рисунок 8.4).




Рисунок 8.4 – Качалка [19]

*Формулировка задачи определения силовой схемы*

Выше были рассмотрены готовые примеры с силовыми схемами деталей. Но естественно возникает вопрос об определении функции $\rho = \rho(x, y, z)$, т. е. как, если не интуитивно, решить, где выгодно «разместить» заданное количество конструкционного материала? Такие задачи по определению функции плотности материала называются задачами *топологической оптимизации*.

Ясно, что распределить материал внутри геометрических ограничений ($\Omega$) можно бесконечным числом способов. Для того, чтобы из этого множества выбрать один вариант силовой схемы, нужно сформулировать некий количественный критерий «совершенства» конструкции (обозначим его $J$), на основании которого делать выбор в пользу той или иной топологии. Обозначим через $P$ множество всевозможных функций плотности $\rho = \rho(x, y, z)$ или, другими словами, множество силовых схем. Тогда можно записать, что $J : P \mapsto \mathbb{R}$. Т.е. оператор $J$ осуществляет отображение функционального пространства $P$ на множество действительных чисел.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ –распределения плотности, соответствующие каким-либо двум силовым схемам, причем $J[\rho_1] < J[\rho_2]$ (квадратные скобки подчеркивают, что $J$ – функционал). Тогда будем считать, что конструкция, выполненная по первой силовой схеме «лучше», выгоднее второй. Отталкиваясь от этих положений, мы можем сформулировать задачу поиска наилучшей силовой схемы в общем виде:

$$\begin{aligned} &\min_{\rho} J[\rho], \\ &\rho \in P_{ad} \subset P \end{aligned} \tag{8.1}$$

где $P_{ad}$ (*ad. – admissible – англ. «допустимый»*) - множество допустимых силовых схем. Оно определяется ограничениями, которые с заданной точностью не должны нарушаться для результирующей, окончательной топологии конструкции. Задача (8.1) на поиск минимума функционала относится к классу задач вариационного исчисления, а более точно – к оптимизации (математическому программированию).

В качестве критерия $J$ естественно выбрать массу: для авиационных конструкций более легкая конструкция, как правило, означает и лучшую конструкцию. Множество $P_{ad}$ целесообразно определить исходя из требований прочности, зачастую, наиболее существенных для высоконагруженных деталей. В этом случае, задача (6.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\min_{\rho} m[\rho], \\ &m[\rho] = \rho_0 \int_{\Omega} \rho d\Omega, \\ &\rho \in P_{ad} \subset P, \\ &P_{ad} = \left\{ \rho \middle| \sigma[\rho] \le \sigma_{\lim} \right\} \cup \left\{ \rho \middle| 0 \le \rho \le 1 \right\}. \end{aligned} \tag{8.2}$$


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Здесь $\rho_0 = \text{const}$ – абсолютная плотность используемого конструкционного материала детали. Последняя строчка в (8.2) выражает тот факт, что напряжение по принятой теории прочности (чаще всего по IV, т. е. $\sigma$ – эквивалентное напряжение по Мизесу) в *каждой* точке конструкции $\Omega$ не превышает допускаемого значения $\sigma_{\lim}$. Отметим, что зависимость напряжений в данной точке от плотности (или – что-то же – от жесткости) носит сильно нелинейный характер из-за явления статической неопределимости, которое состоит в том, что распределение внутренних усилий в сплошной среде зависит от распределения жесткостей (модуля упругости) в ней. Данное обстоятельство делает процесс точного решения (8.2) довольно затратным с точки зрения вычислительных затрат. Разработка наиболее эффективного алгоритма для ее решения и сегодня остается актуальной задачей. Поэтому на практике, во многих коммерческих промышленных CAE-системах, зачастую предлагается другой подход:

$$\begin{aligned}
&\min_{\rho} U[\rho], \\
&U[\rho] = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma\varepsilon d\Omega, \\
&\rho \in P_{ad} \subset P, \\
&P_{ad} = \left\{ \rho \left| V = \int_{\Omega} \rho d\Omega \le V_0 \right. \right\} \cup \left\{ \rho \left| 0 \le \rho \le 1 \right. \right\}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Здесь $U$ – энергия деформации. Т. е. вместо конструкции минимальной массы ищется конструкция с минимальной энергией деформации или конструкция с *наибольшей жесткостью,* выполненная из *заданного* количества материала $V_0$. Отметим, что в (6.3) используется всего *одно* функциональное (вдобавок, линейное) ограничение на проектные переменные


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega \le V_0$$

вместо «локального» $\sigma[\rho] \le \sigma_{\lim}$, которое должно удовлетворяться всюду по конструкции. Оказывается, что топологии, полученные по (6.2) и (6.3) довольно схожи, т. е. наиболее жесткая конструкция почти во всем в силовом отношении «наследует черты» наиболее легкой.

Простейший алгоритм поиска конструкции наибольшей жёсткости при заданном количестве материала описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$\rho_i^{(r+1)} = \rho_i^{(r)} \cdot \frac{\bar{U}_i}{\lambda},$$

где $r$ – номер итерации,

$i$ – номер элемента,

$\bar{U}_i$ – удельная энергия деформации элемента,

$\lambda$ – множитель Лагранжа.

Последний подбирается на каждой итерации одним из методов одномерного поиска для удовлетворения ограничения на объём. При этом плотность ограничена диапазоном от 0 до 1.

Рассмотрим задачу проектирования плоского кронштейна навески закрылка самолёта на два случая нагружения (рисунок 8.5).

На рисунке 8.5 отмечены два направления нагрузки, соответсвующие убранному и выпущенному положениям закрылка. Угол ориентации вектора силы для выпущенного положения указан в задании, для убранного – 20°. Рассмотрение, по крайней мере, двух случаев нагружения представляется необходимым. В противном случае, получим деталь, работающую только для одного направления нагрузки.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

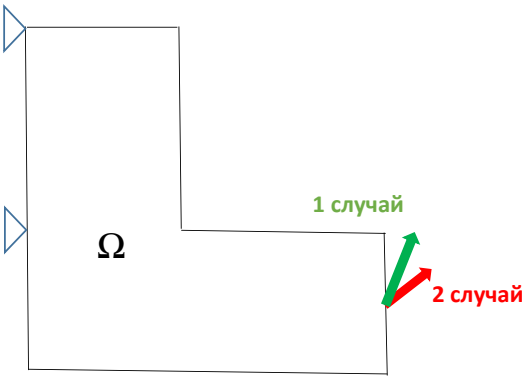



Рисунок 8.5 – Постановка задачи

*Построение геометрической модели для топологической оптимизации*

Рекомендуемая геометрическая модель задачи приведена на рисунке 8.6.

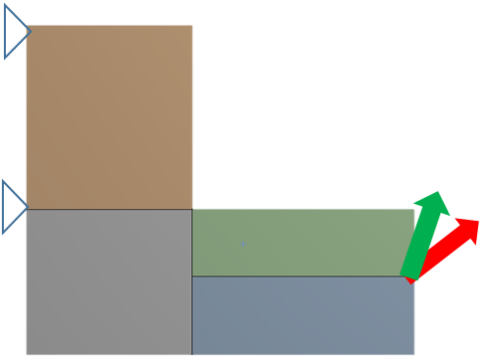


Рисунок 8.6 – Геометрическая модель для топологической оптимизации

Следует обратить внимание, что геометрическая модель должна состоять из нескольких поверхностей, чтобы можно было точно определить места закреплений и нагрузки.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

В разделе Engineering Data модуля Static Structural определяются свойства материала – по умолчанию принимается конструкционная сталь, но на данном этапе это не принципиально: силовая схема инвариантна по отношению к упругим характеристикам изотропных материалов, лежащим в разумном интервале.

Geometry – раздел определения геометрии. В комплект ANSYS входит собственная CAD-система Design Modeler, и для построения несложных сборок ее мощностей вполне достаточно. Имеется также интерфейс связи с «родными» форматами NX, CATIA, Creo Elements/Pro, и, конечно, возможность чтения стандартных нейтральных форматов (*.stp, *.igs).

В разделе Geomertry выбирается для импорта предварительно созданный, который может быть открыт в системе Design Modeler. Необходимо провести объединение отдельных частей поверхности в одну деталь (Part) для создания совпадающих узлов расчетной сетки по их границам – в противном случае, эти поверхности, как и любые другие объекты будут никак не связаны друг с другом.

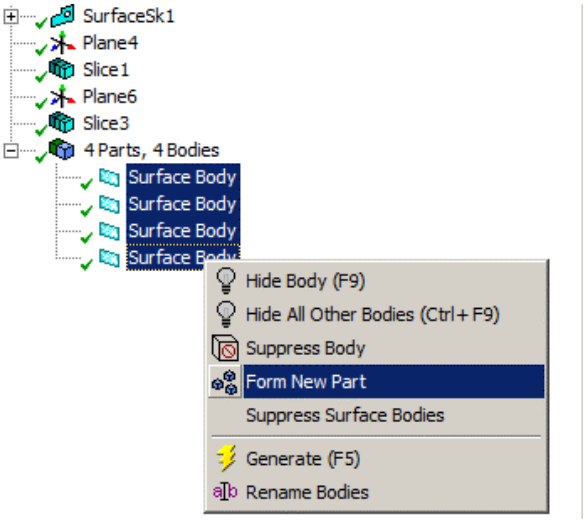



Рисунок 8.7 – Объединение отдельных частей поверхности в одну деталь


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Построение КЭМ для оптимизации*

За построение сетки, задание граничных условий, формирование входного файла, чтение выходного и отображение результатов отвечает программа ANSYS Mechanical. Ее интерфейс состоит из трех частей: дерева модели, окна свойств компонентов дерева и, собственно, графическое окно (рисунок 8.8).

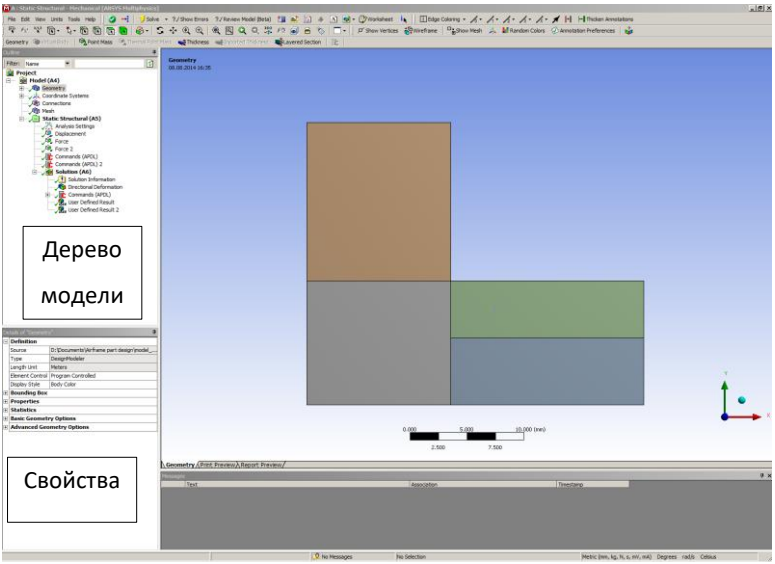



Рисунок 8.8 – Интерфейс Mechanical
с импортированной геометрической моделью

ANSYS поддерживает согласованность единиц измерения. Для выбора системы последних необходимо обратиться к меню Units и выбрать метрическую систему единиц Metric (kg, mm, N, …). При этом напряжения будут иметь размерность МПа.

В ветке Geometry перечислены все геометрические объекты: линии, поверхности, объемные тела. Необходимо выбрать все поверхности и в окне свойств придать им произвольную толщину в


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

поле Thickness, например, 20 мм. Как уже было оговорено выше, оптимальная топология не зависит от начальной жесткости элементов.

*Задание граничных условий*

Граничные условия определены заданием нагрузок на перемещения и закрепления кронштейна (рисунок 8.9).

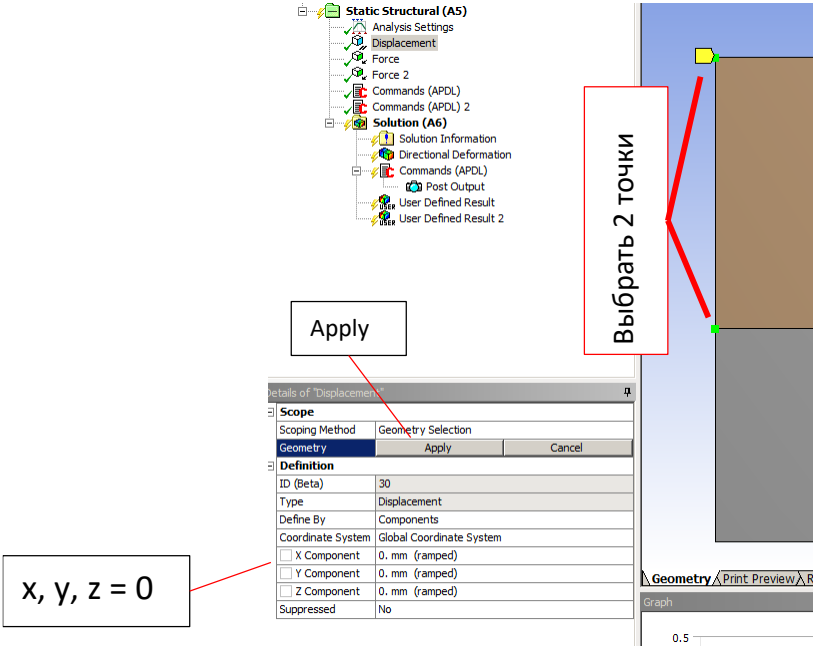



Рисунок 8.9 – Установка закреплений

Нагрузка осуществляется двумя сосредоточенными силами, соответствующими двум случаям нагружения, следующим образом (в данном примере вторая сила будет отличаться по направлению от рекомендуемой) (рисунок 8.10).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Tabular Data

| | Steps | Time [s] | X [N] | Y [N] | Z [N] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0, | 0, | 0, | 0, |
| 2 | 1 | 1, | 10, | 10, | 0, |
| 3 | 2 | 2, | 0, | 0, | = 0, |

Рисунок 8.10 – Определение компонент силы
для первого случая нагружения

Задание нагрузки второй силы представлено на рисунке 8.11.

Tabular Data

| | Steps | Time [s] | X [N] | Y [N] | Z [N] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0, | 0, | 0, | 0, |
| 2 | 1 | 1, | 0, | 0, | 0, |
| 3 | 2 | 2, | 4,836 | 13,289 | = 0, |
| * | | | | | |

Рисунок 8.11 – Определение компонент силы
для второго случая нагружения

Проведение топологической оптимизации

В данной работе используется встроенные в решатель возможности топологической оптимизации, вызываемые при помощи командных вставок на языке APDL (ANSYS Parametric Design Language). В настоящее время существует также возможность использования отдельного модуля топологической оптимизации, встроенного в Workbench.

Первая командная вставка служит для определения числа элементов в модели.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

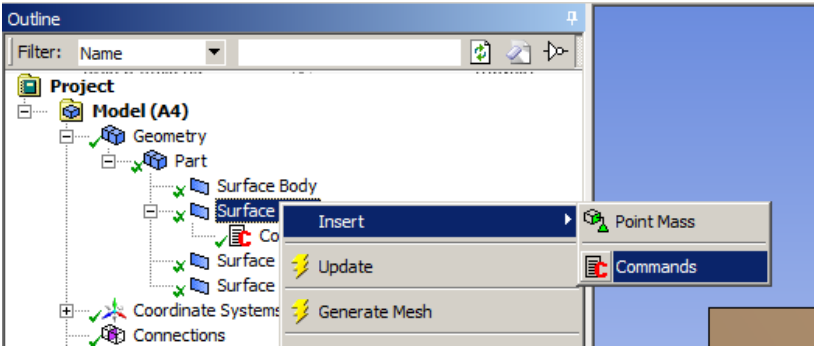



Рисунок 8.12 – Определение командной вставки в ветку дерева Geometry

Выбрав вновь появившийся объект Commands, пропишем в него две строчки (рисунок 8.13).

```
*vget,el,elem,,elist
*get,ne,parm,el,dim,1
```

Запись в массив *el* номера всех КЭ

Запись переменную *ne* количество элементов массива *el*

Рисунок 8.13 – Текст первой командной вставки

Следующая командная вставка – в ветке Static Structural. Ее текст состоит из одного слова – lswrite, после ее выполнения решатель в рабочую директорию проекта запишет специальный файл с данными о нагрузках. При этом важно выставить в свойствах (Details) этой командной вставки Step Selection Mode = All, чтобы lswrite выполнялась на каждом шаге нагружения.

Основной блок команд, задающих, собственно все параметры оптимизации и также расположенный в Static Structural приведен на рисунке. Текст после восклицательного знака – комментарий – можно не писать.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

```
/prep7
       et,1,82
       *do,i,1,ne
              emodif,el(i),type,1
       *enddo
finish
esel,all

TOCOMP,MCOMP,MULTIPLE,2   ! Define weighted multiple compliance function
                            "MCOMP"
                          ! considering all two load cases
TOVAR,MCOMP,OBJ           ! Define "MCOMP" as topological objective
TOVAR,VOLUME,CON,,50      ! Define "VOLUME" as topological constraint
TOTYPE,SCP
TODEF,1e-6                   ! Initialize topo opt.
TOLOOP,40                 ! Solve and perform topological optimization
```

Рисунок 8.14 – Текст основной командной вставки по оптимизации

Здесь команда /prep7 открывает режим препроцессора решателя, в котором каждому КЭ присваивается тип с порядковым номером 82. Это 8-узловой плоский конечный элемент. Затем определяется целевая функция оптимизации (MCOMP), представляющая собой взвешенную сумму податливостей (энергий деформаций), накапливаемых в конструкции на каждом случае нагружения. Отметим, что фактически, мы будем решать задачу мнококритериальной оптимизации, минимизируя одновременно две функции цели. Команда TOVAR определяет верхнюю границу объема материала в процентах (в данном случае 50%). TOTYPE задает алгоритм решения: это может быть OC (Optimally criteria – метод оптимального критерия) или SCP (Sequential Convex Programming – метод последовательного выпуклого программирования), как в данном случае. Последний занимает чуть больше машинного времени, но дает более точный результат. TODEF – инициализация топологической оптимизации с указанием критерия (точности) останова (сходимости). Наконец, TOLOOP – проведение оптимизаций с максимальным числом итераций – 40.

Также, как и для вставки с lswrite, здесь необходимо изменить в Details параметр Step Selection Mode, установив его значение на


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Last, что означает выполнение оптимизационного кода после просчета последнего шага нагружения.

Таким образом, ветка дерева Static Structural будет иметь следующий вид (рисунок 8.15). После чего расчет запускается нажатием на кнопку Solve.

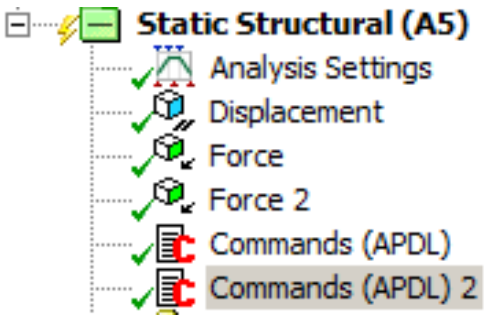



Рисунок 8.15 – Ветка дерева Static Structural
после добавления командных вставок

*Отображение результатов оптимизации*

Для визуализации результатов необходимо обратиться к ветке Solution дерева модели. Здесь нам потребуется запросить у постпроцессора картину распределения материала при помощи команд. Для этого ПКМ по Solution – Insert – Commands. APDL-код показан на рисунке 8.16.

```
1 set,last
2 etable,density,topo
3 /show,png

4 /DSCALE,ALL,OFF
5 PLETAB,density,avg
```

Рисунок 8.16 – Командная вставка
для отображения распределения плотности


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Первая строка устанавливает последний случай нагружения, вторая создает таблицу (фактически, двумерный массив) с номерами элементов и плотностями в них, третья – вывод графической информации в файл формата “png”, четвертая – отключение отображения деформированного состояния, пятая – сама «отрисовка» распределения материала.

После расчета в дереве модели под последней командной вставкой появится объект Post Output (рисунок 8.17).

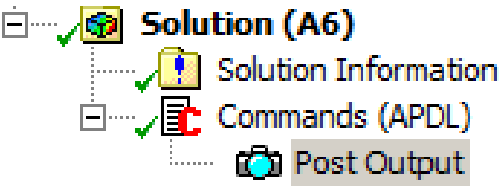



Рисунок 8.17 – Ветка дерева Solution после расчета

Выбрав Post Output, получим в графическом окне результат оптимизации (рисунок 8.18).

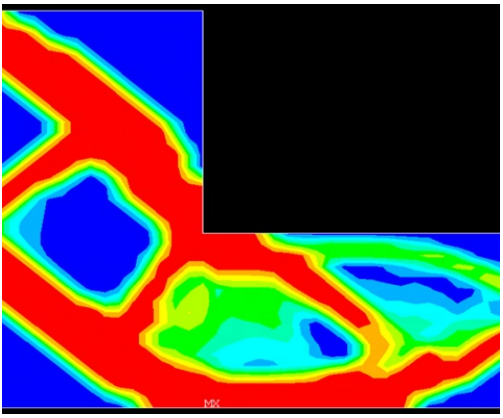


Рисунок 8.18 – Оптимальное распределение материала


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Анализ распределения плотности*

Выше показано то распределение материала детали, к которому нужно стремиться при ее проектировании. Задача – плоская, поэтому плотность можно трактовать как толщину пластины и расценивать красные участки как утолщения-пояса, а остальное - как стенку, в которой возможны отверстия облегчения в областях, где плотность порядка 0,1. Наглядно представить себе работу алгоритма можно так, что он «отфрезеровал» плиту, удалив из нее 50% от исходного объема так, чтобы глобальная жесткость конструкции была максимальной.

На основании распределения плотности можно представить и сформировать конструкцию будущей детали. Удобно эскиз детали делать в каком-либо 2-D графическом редакторе, например, в КОМПАС-График. Для этого создаем новый чертеж, экспортируем туда картинку (в КОМПАС меню Вставка - Рисунок) из ANSYS и «обрисовываем» (рисунок 8.19).

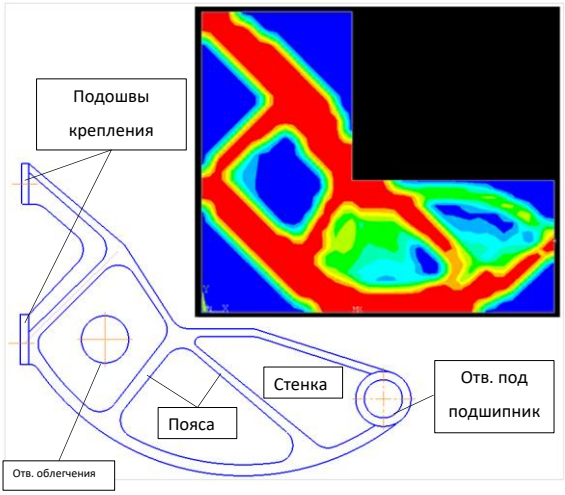



Рисунок 8.19 – Интерпретация распределения плотности


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Построение геометрической модели детали*

Геометрию можно построить в любой параметрической CAD-системе, например, в NX или КОМПАС -3D. Модель следует запараметризовать так, чтобы можно было легко менять размеры сечений, которые предстоит подобрать по требования прочности. Для длинных поясов ферменных кронштейнов может потребоваться проведение проверки на потерю устойчивости, которую можно сделать в модуле ANSYS Linear Buckling или инженерными методами.

Модель необходимо строить также с учетом технологических ограничений (минимальной толщины стенки при штамповке, уклоны и т.д.). Пример геометрической модели показан на рисунке 8.20.

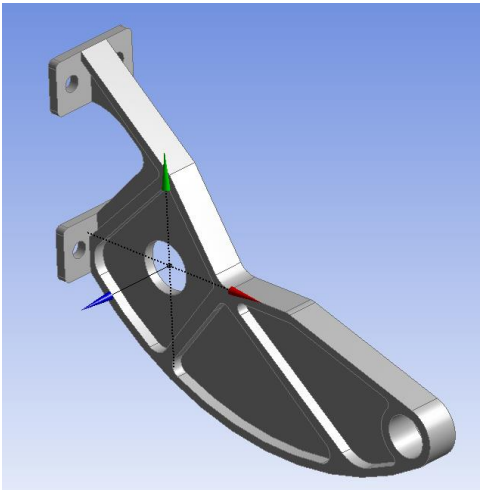


Рисунок 8.20 – Геометрическая модель кронштейна

*Расчёт на прочность*

Для оценки прочности спроектированной детали нужно определить поле эквивалентных напряжений в ней при помощи соответствующей CAE-системы, например, ANSYS или FEMAP/NASTRAN.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

В случае неудовлетворения условий прочности (напряжения превышают допускаемые: для алюминиевых сплавов это порядка 350...400 МПа), проводится корректировка конструкции: варьируются площади поясов, толщины стенок, проводится «борьба» с концентраторами напряжений путем добавления скруглений, наплывов и пр.

*Импорт геометрической модели и определение свойств материала*

В Workbench создаем модуль Static Structural, в блок Geometry импортируем построенную CAD-модель. Определим материал детали, например алюминиевый сплав в блоке Engineering Data (рисунок 8.21).

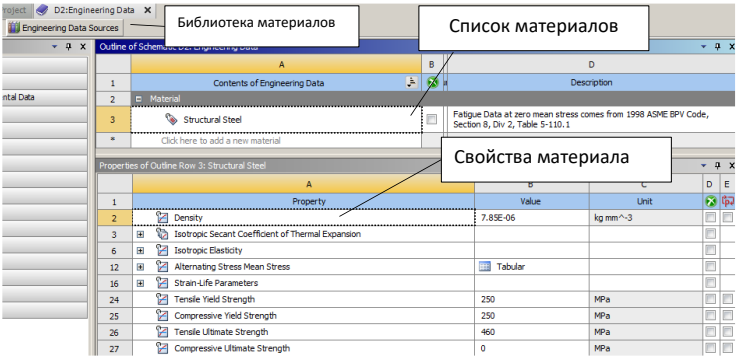



Рисунок 8.21 – Окно Engineering Data

Для этого можно создать новый материал и придать ему требуемые свойства, или выбрать его уже из предустановленных вариантов в библиотеке Engineering Data Sources (рисунок 8.22).

В ветке Geomerty дерева модели Mechanical выбираем тело детали и в Details изменяем значение в поле Assigment на Aluminum Alloy (рисунок 8.23).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

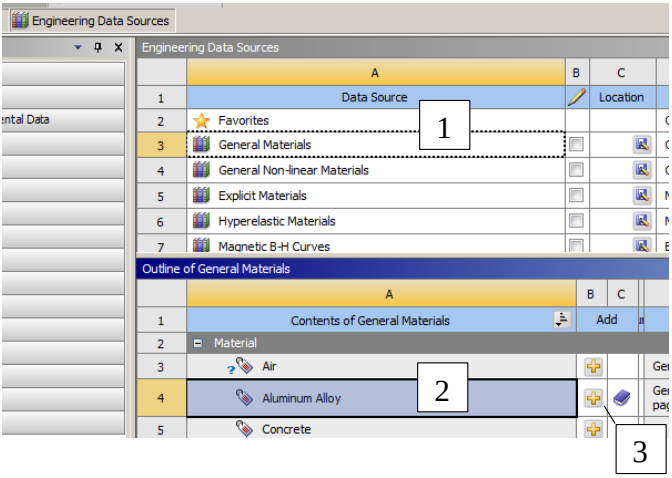



Рисунок 8.22 – Выбор алюминиевого сплава из библиотеки материалов

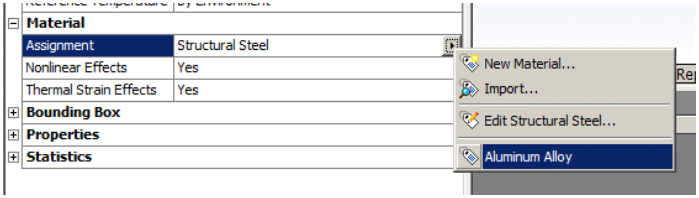



Рисунок 8.23 – Присвоение материала к детали

Сетка КЭ может быть создана с помощью объекта дерева Mesh: ПКМ – Generate Mesh (рисунок 8.24). Сетка должна быть довольно густая: для контроля размеров элементов используется раздел Sizing в Details для Mesh, где в поле Element Size можно указать размер элементов.

*Задание граничных условий и запуск расчета*

Нагрузки и закрепления определяются в ветке Static Structural. В качестве закреплений используем жесткую заделку (Fixed Support) для задних поверхностей подошв крепления кронштейна: ПКМ – Insert – Fixed Support (рисунок 8.25).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

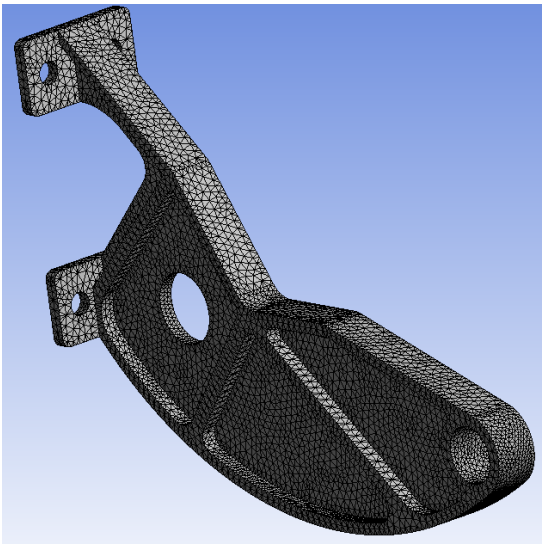


Рисунок 8.24 – Сетка из твердотельных КЭ

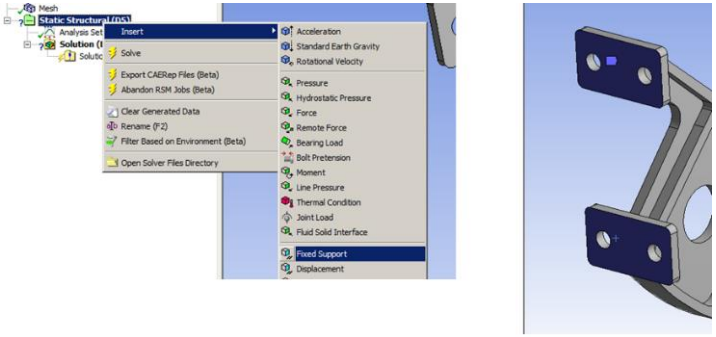



Рисунок 8.25 – Закрепления

Обратим внимание на геометрически-ориентированную парадигму Workbench: нагрузки и закрепления прикладываются к объектам геометрии, откуда они автоматически переносятся на узлы КЭ. Хотя, возможность работать напрямую с узлами и элементами также имеется.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Поскольку мы сейчас работаем с двумя случаями нагружения, то в Analysis settings нужно установить параметр Number of Steps на 2. Сама сила (ее величина и направление) задается также, как и на этапе поиска силовой схемы, разве что теперь она будет распределенной по поверхности отверстия под подшипник по гармоническому закону (по «синусу»), что имитирует нагрузку от оси вращения закрылка. Схематически она представлена на рисунке 8.26.

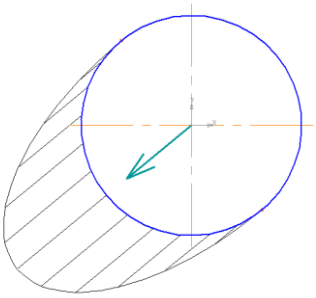


Рисунок 8.26 – Распределение нагрузки по поверхности отверстия

В Mechanical такое нагружение осуществляется с помощью опции Bearing Load (рисунок 8.27), после чего расчет может быть запущен кнопкой Solve.

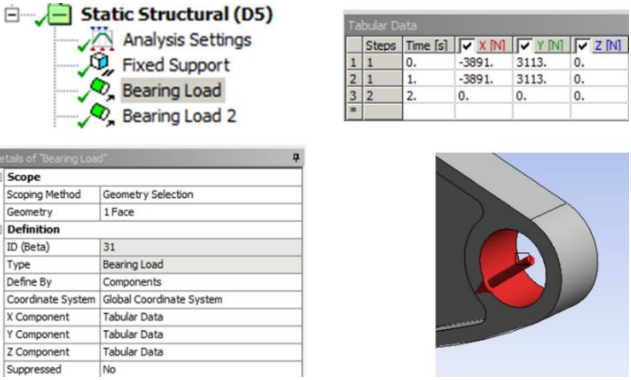



Рисунок 8.27 – Задание нагрузки


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

*Анализ результатов расчёта*

Отображение распределения эквивалентных напряжений по Мизесу (по IV теории прочности) (рисунок 8.28).

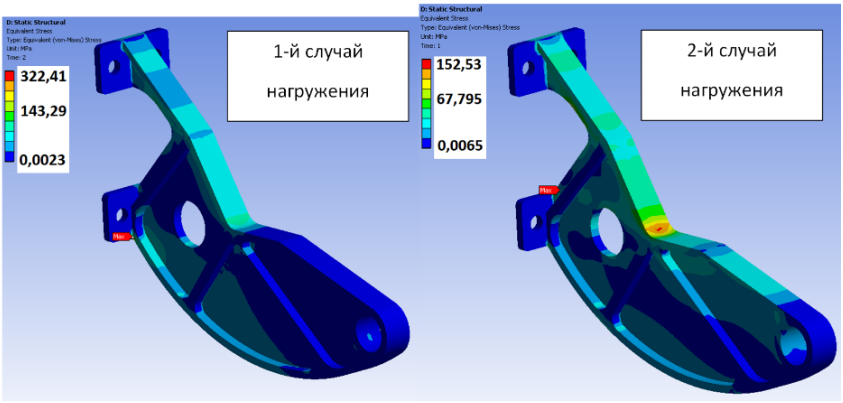



Рисунок 8.28 – Распределение *эквивалентных напряжений*

Переключение между шагами нагружения осуществляется в Details объекта дерева Equivalent Stress в поле Display Time. Дело в том, что ANSYS рассматривает статическую задачу как квазистатическую, т. е. нагрузка линейно растет от нуля до номинального значения за условную одну секунду. Соответственно, в нашем случае, в промежутке от 0 до 1 секунды действует первое усилие, а от 1 до 2-й – второе.

В данном случае, наиболее опасным является первый случай ($\sigma_{\max} = 322\,МПа$ – прочность достаточна), максимум достигается в месте стыка нижнего пояса и подошвы, где, согласно балочной теории, и развивается наибольший изгибающий момент (рисунок 8.29).

Если окажется, что $\sigma_{\max} > [\sigma]$, то необходимо вносить изменения в конструкцию и осуществлять повторный расчёт.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

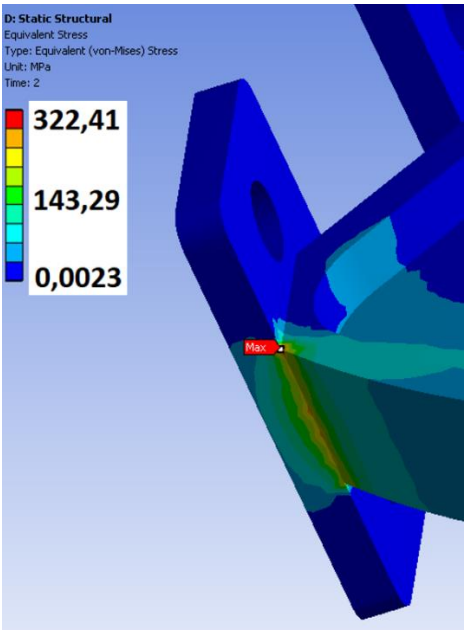



Рисунок 8.29 – Зона максимальных напряжений

### *Контрольные вопросы*

1. Дайте понятие силовой схемы конструкции в терминах функции плотности.

2. Как Вы понимаете термин «топологическая оптимизация»?

3. Приведите формулировку задачи топологической оптимизации на поиск наиболее жёсткой конструкции.

4. Приведите формулу для пересчёта плотностей элементов в алгоритме топологической оптимизации.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# 9 ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

*Понятие параметрической оптимизации. Алгоритмы оптимизации в системе Ansys DesignXplorer.*

Параметрическая оптимизация – это вычислительная технология, позволяющая подобрать параметры конструкции так, чтобы обеспечить экстремум заданного критерия при выполнении проектных ограничений. В качестве критерия, называемого целевой функцией, нередко используется масса конструкций. В качестве проектных ограничений, называемых также функциями ограничений, может выступать, например ограничения по прочности и жёсткости. Наиболее характерный пример параметров конструкции, выбираемых в качестве проектных переменных – это её геометрические размеры.

Модули по оптимизации интегрируются с CAE-системами. Из отечественных систем по оптимизации можно выделить IOSO [20]. В комплекте с Ansys поставляется система DesignXplorer.

Для решения задачи оптимизации используются специальные алгоритмы. Рассмотрим алгоритмы оптимизации, реализованные в системе Ansys DesignXplorer.

Методы оптимизации DesignXplorer позволяют решать задачи нелинейной многокритериальной оптимизации с ограничениями. Перечень методов включает в себя:

– Сканирование (Screening);

– Нелинейное программирование с квадратичным Лагранжианом (NLPQL);



Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

– Последовательное квадратичное программирование со смешанными (непрервыными и целочисленными) проектными переменными (MISQP);

– Оптимизация на базе адаптивной поверхности отклика с одной целевой функцией (ASO);

– Генетический алгоритм многокритериальной оптимизации (MOGA);

– Многокритериальная оптимизация на базе адаптивной поверхности отклика (AMO).

*Сканирование (Screening)*

Этот метод, по своей сути, простой перебор различных комбинаций проектных переменных и выбор среди них наилучшего варианта. Полный перебор всех вариантов, очевидно, невозможен для сколько-нибудь приближенных к практике задач ввиду того, что количество этих вариантов растёт с ростом числа проектных переменных по экспоненциальному закону. Поэтому в методе сканирования реализуется специальный алгоритм по генерации массива точек, который более-менее равномерно заполняет пространство поиска, не прибегая к полному перебору всех вариантов.

Сканирование – это неитеративный метод прямого сэмплирования, использующий генератор квазислучайных чисел на основе алгоритма Хаммерсли. Метод позволяет равномерно распределить точки в пространстве проектных переменных. При этом число точек с ростом числа проектных переменных не увеличивается экспоненциально.

Алгоритм состоит в следующем. Любое целое число $n$ можно представить в виде последовательности цифр $n_0, n_1, \ldots, n_m$:

$$n = n_0 n_1 n_2 \ldots n_m .$$

Например, для числа 687459 будем иметь $n_0 = 6$, $n_1 = 8$ и т. д. В системе исчисления по основанию $R$ число $n$ представляется в виде:


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

$$n = n_m + n_{m-1}R + \ldots + n_0 .$$

Введём функцию

$$\Phi_R(n) = 0 n_m n_{m-1} n_{m-2} \ldots n_0 = n_m R^{-1} + n_{m-1} R^{-2} + \ldots + n_0 R^{-(m-1)} .$$

Точки Хаммерсли для $k$ -мерного пространства проектных переменных определяются выражением:

$$H_k(i) = \left[ \frac{i}{N}, \Phi_{R_1}(i), \Phi_{R_2}(i), \ldots, \Phi_{R_{k-1}}(i) \right],$$

где $i = 0, \ldots, N$ обозначает номера точек. Визуализация этих точек показывает их повышенную концентрацию у центра $k$ -мерного гиперкуба. Для устранения данного эффекта используется сдвиг каждой точки на величину

$$\Delta = \frac{1}{2} N ,$$

что приводит к более равномерному заполнению пространства поиска.

*Нелинейное программирование с квадратичным Лагранжианом (NLPQL)*

Метод позволяет решать задачи оптимизации вида

| | |
|---|---|
| минимизация | $f(\mathbf{x})$ |
| при условии | $g_k(\mathbf{x}) \le 0,\ k = 1, 2, \ldots, K$ |
| | $h_l(\mathbf{x}) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, L$ |
| | $x_L \le x \le x_U$ |

Предполагается, что целевая функция и функции ограничений непрерывно дифференцируемы. Идея состоит в решении последовательности подзадач квадратичного программирования, полученных путём квадратичной аппроксимации функции Лагранжа и линеаризации ограничений. Анализ чувствительности второго порядка осуществляется по квазиньютоновской формуле, также метод стабилизируется дополнительным линейным поиском.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Метод хорошо работает на задачах небольшой размерности (порядка 10-15 переменных), а также когда все величины находятся примерно в одном масштабе. Точность метода зависит от точности вычисления градиента, для вычисления которого используется конечно-разностная аппроксимация.

*Последовательное квадратичное программирование со смешанными (непрервыными и целочисленными) проектными переменными (MISQP)*

Метод позволяет решать задачи оптимизации вида

минимизация $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$

при условии $g_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,\ j = 1,\ldots,m_e$

$g_j(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0,\ j = m_e+1,\ldots,m$

$x_L \leq x \leq x_U$

где

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_c}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_i}$,

$x_l \leq x \leq x_u$,

$y_l \leq y \leq y_u$.

Здесь $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – векторы непрерывных и дискретных проектных переменных соответственно. Предполагается, что функции $f(x,y)$ и $g_j(x,y),\ j = 1,\ldots,m$ непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}^{n_c}$. Релаксация целочисленных переменных не выполняется. Другими словами, все функции вычисляются только при их дискретных значениях, но не при дробных, промежуточных.

MISQP решает задачу оптимизации модифицированным методом последовательного выпуклого программирования. После линеаризации ограничений и формирования квадратичной аппроксимации Лагранжиана, генерируются задачи смешанного квадратичного программирования, которые решаются эффективным методом ветвей и


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

границ. Алгоритм стабилизируется методом «региона доверия». Гессиан функции Лагранжа аппроксимируется методом Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно (BFGS) по отношению как к непрерывным, так и дискретным проектным переменным. MISQP позволяет также решать задачи невыпуклого нелинейного смешанного программирования.

*Оптимизация на базе адаптивной поверхности отклика с одной целевой функцией (ASO)*

ASO – математический метод оптимизации, комбинирующий планирование эксперимента по схеме оптимального заполнения пространства, поверхность отклика на основе кригинга (регрессии) и MISQP. Этот метод использует градиентную информацию.

ASO поддерживает одну целевую функцию и множество ограничений. Он работает с непрерывными проектными переменными, допускающими использование технологичных значений. Метод не позволяет накладывать взаимосвязи между проектными переменными.

ASO позволяет решает задачу нелинейного программирования с ограничениями:

| | |
|---|---|
| минимизация | $f(\mathbf{x})$ |
| при условии | $g_k(\mathbf{x}) \le 0,\ k = 1,2,\ldots,K$ |
| | $h_l(\mathbf{x}) = 0,\ l = 1,2,\ldots,L$ |
| | $x_L \le x \le x_U$ |

Алгоритм работает по принципу рационального сужения области поиска с целью нахождения глобального экстремума.

*Генетический алгоритм многокритериальной оптимизации (MOGA)*

MOGA представляет собой разновидность популярного метода NSGA-II, основанный на контролируемом элитизме. Он поддерживает все типы проектных переменных. Схема ранжирования Парето


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

осуществляется быстрым недоминирующим алгоритмом сортировки, являющимся на порядок более эффектным, чем традиционных процедуры. Учёт ограничений базируется на таком же бездоминантном принципе как для целевых функций. Поэтому штрафные функции или множители Лагранжа не используются. Допустимые решения всегда ранжируются выше, чем недопустимые.

Решения на первом фронте Парето сохраняются в отдельном множестве и отделяются от остальных точек. Это обеспечивает минимальное повреждение фронта Парето, доступное с ранних итераций. Для контроля элитизма такого рода и предотвращения преждевременной сходимости, существует специальный параметр (максимально допустимый процент Парето, maximum allowable Pareto percentage).

*Многокритериальная оптимизация на базе адаптивной поверхности отклика (АМО)*

Данный алгоритм комбинирует поверхность отклика на основе кригинга (регрессии) и генетический алгоритм MOGA. Это позволяет более точно генерировать новый набор точек или использовать существующий по сравнению со сканировнаием. Оптимизатор, как правило, не вычисляет значения функций во всех проектных точках. Часть популяции MOGA рассчитывается на основе поверхности отклика. Предиктор регрессии (кригинга) сокращает число вычислений, используемых для поиска первых решений фронта Парето.

АМО поддерживает несколько целевых функций и несколько ограничений. Он поддерживает только непрерывные проектные переменные, но с возможностью учёта их технологичных значений. Если в проекте необходимо варьировать дискретные переменные, следует обратиться к методу MOGA.

В качестве примера параметрической оптимизации конструкции в системе ANSYS может быть рассмотрена задача под-


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

бора толщины пластины по критерию минимума массы при условии ограничений на напряжения.

Эскиз пластины представлен на рисунке 9.1.

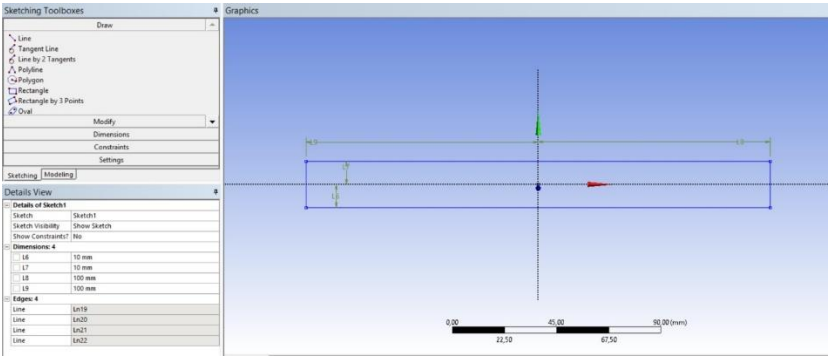



Рисунок 9.1 – Эскиз пластины в DesignModeler

Трехмерная модель получена выдавливанием эскиза командой Extrude (рисунок 9.2), толщина выдавливания при этом определяется параметрически (рисунок 9.3) Начальное приближение толщины выбрано равным 10 мм.

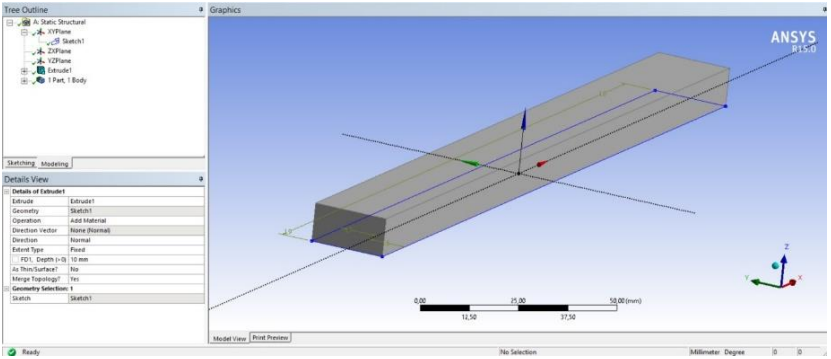



Рисунок 9.2 – Геометрия пластины


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

| Details View | |
|---|---|
| **Details of Extrude1** | |
| Extrude | Extrude1 |
| Geometry | Sketch1 |
| Operation | Add Material |
| Direction Vector | None (Normal) |
| Direction | Normal |
| Extent Type | Fixed |
| P FD1, Depth (>0) | 10 mm |
| As Thin/Surface? | No |
| Merge Topology? | Yes |
| **Geometry Selection: 1** | |
| Sketch | Sketch1 |

Рисунок 9.3 – Параметризация геометрии

Параметрическая оптимизация основана на решении прямой задачи методом конечных элементов. Сетка конечных элементов построена в системе ANSYS Mechanical и представлена на рисунке 9.4.

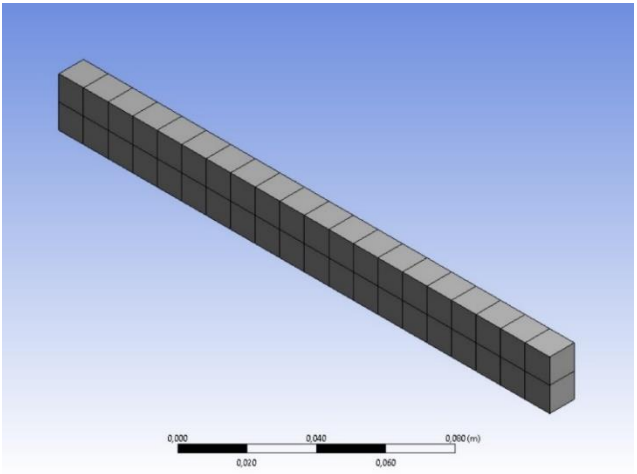



Рисунок 9.4 – Сетка КЭ

С одной стороны пластины задаётся условие закрепления по всем степеням свободы “Fixed Support” (рисунок 9.5).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

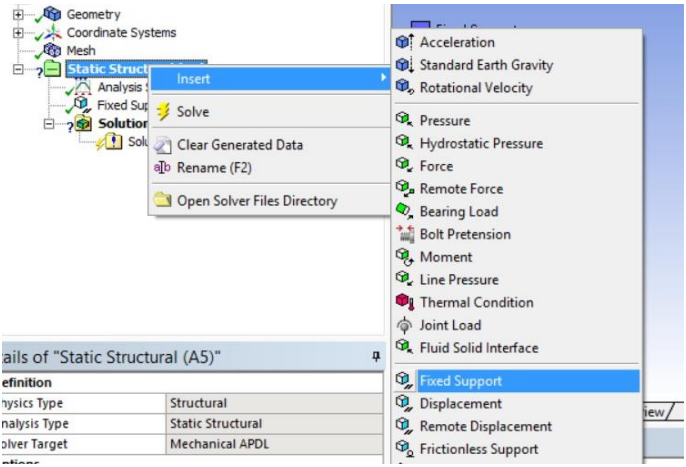



Рисунок 9.5 – Задание закреплений

С противоположной стороны приложена растягивающая сила равная 10000 Н (рисунок 9.6).

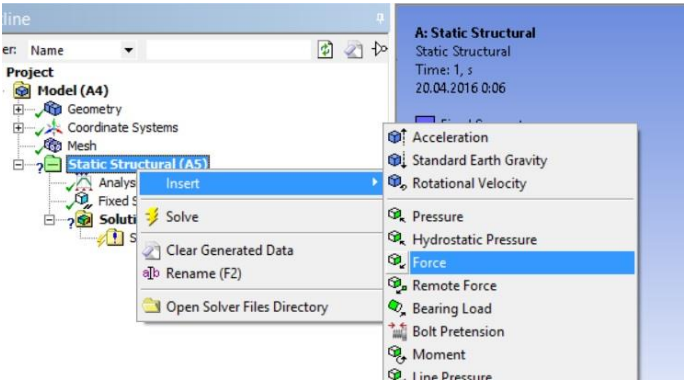



Рисунок 9.6 – Задание нагрузки

Далее, в окне Details of “Force”, назначаем величину силы, равную 10000 Н (рисунок 9.7).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

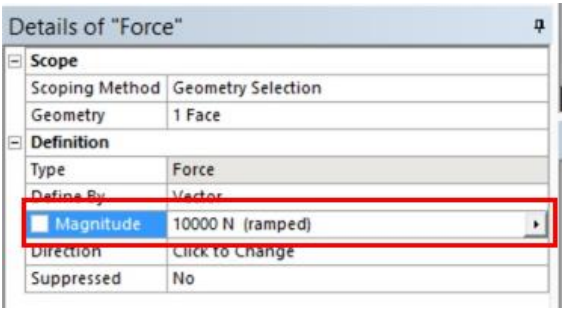



Рисунок 9.7 – Задание величины нагрузки

Для постановки задачи оптимизации необходимы целевая функция и ограничения. В качестве целевой функции выступает масса. Для добавления её в систему оптимизации, необходимо выбрать в ветке дерева Geometry тело детали – и в окне Details в разделе Properties и установить символ P в квадрате напротив Mass (рисунок 9.8).

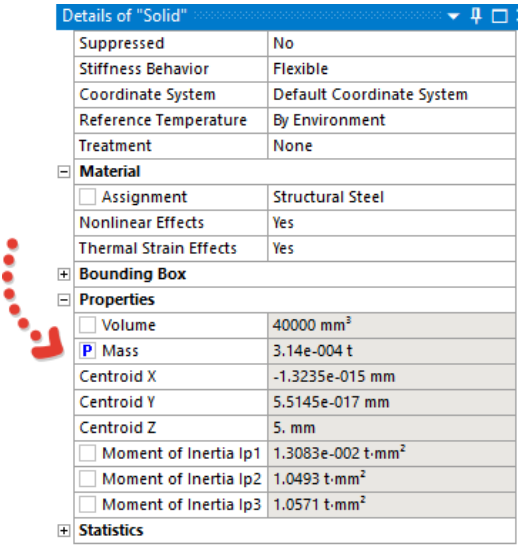



Рисунок 9.8 – Добавление массы в систему оптимизации


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

В качестве ограничений выступают максимальные эквивалентные напряжения в модели, которые могут быть выбраны в дереве объект результата с напряжениями и в окне Details ставим галочку напротив Maximum (рисунок 9.9)

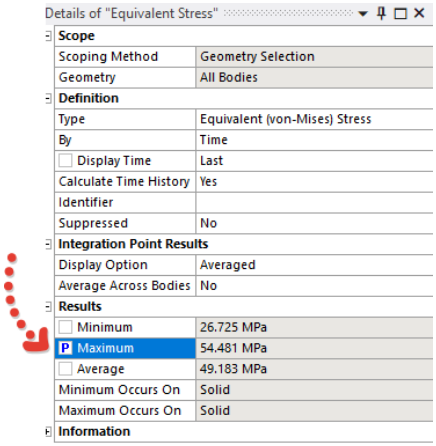



Рисунок 9.9 – Добавление максимальных напряжений в систему оптимизации

Далее из списка расчётных систем ANSYS Workbench в разделе Design Exploration необходимо выбрать модуль Direct Optimization и перетащить его в рабочее поле проекта (рисунок 9.10).

Модуль Direct Optimization открывается двойным щелчком по значку Optimization. В окне Outline of Schematic: Optimization выбираем раздел Objectives and Constraints (рисунок 9.11).

В появившейся таблице Table of Schematic:Optimization в столбце Parameter необходимо выбрать Solid Mass, в столбце Objective-Type выбираем Minimize. Таким образом масса может быть определена в качестве целевой функции, которую нужно минимизировать. Ограничения на максимальное напряжение так же вводятся в столбце Parameter при выборе Equivalent Stress Maximum и задании Values <= Upper Bound (рисунок 9.12).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

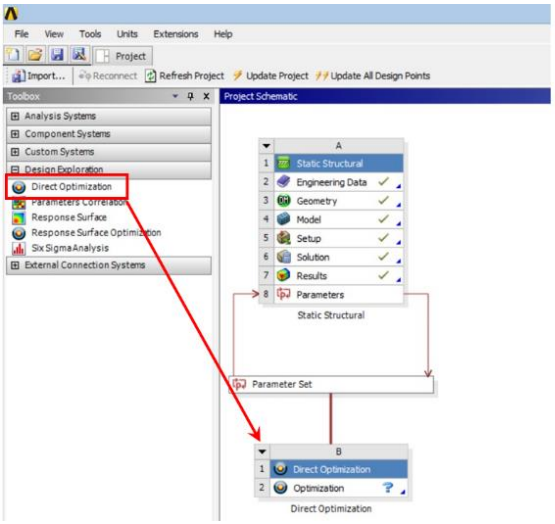



Рисунок 9.10 – Добавление модуля оптимизации в проект

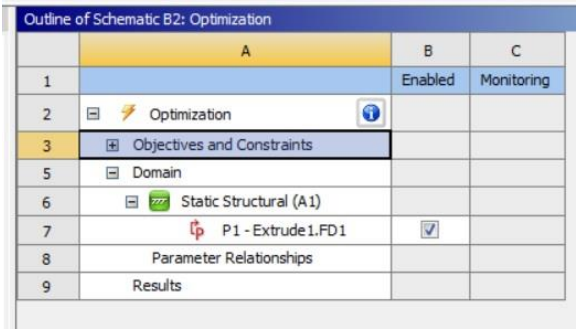



Рисунок 9.11 – Дерево оптимизационной модели

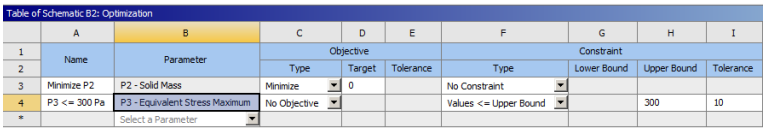



Рисунок 9.12 – Окно постановки задачи оптимизации


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Метод оптимизации может быть определен в разделе Optimization (рисунок 9.13).

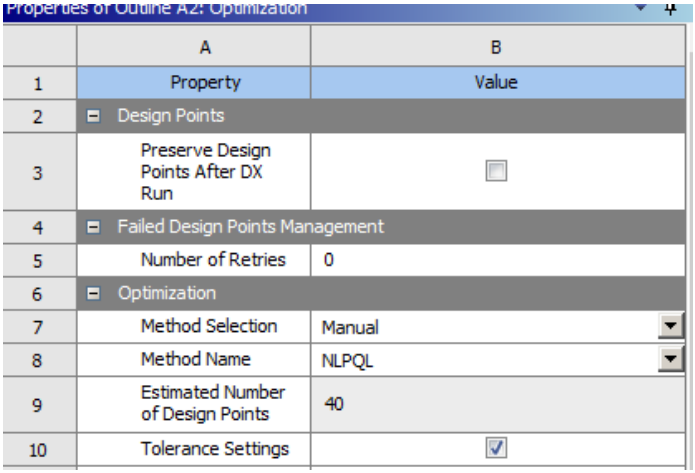



Рисунок 9.13 – Выбор метода оптимизации

Так же необходимо задать ограничения на минимальную (Lower Bound) и максимальную (Upper Bound) толщину пластины в разделе Domain (рисунок 9.14).

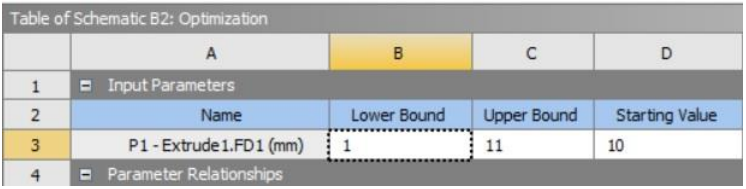



Рисунок 9.14 – Задание диапазона изменения проектной переменной

Далее при обновлении проекта Update запускается процесс оптимизации.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

После завершения процесса оптимизации будет получено оптимальное значение толщины 1,79 мм. Изменение целевой функции (массы) по итерациям показано на рисунке 9.15.

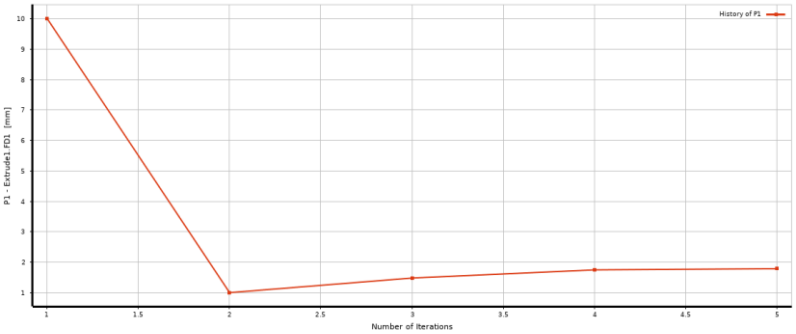



Рисунок 9.15 – Изменение целевой функции по итерациям

Изменение ограничения (максимального напряжения) по итерациям показано на рисунке 9.16.

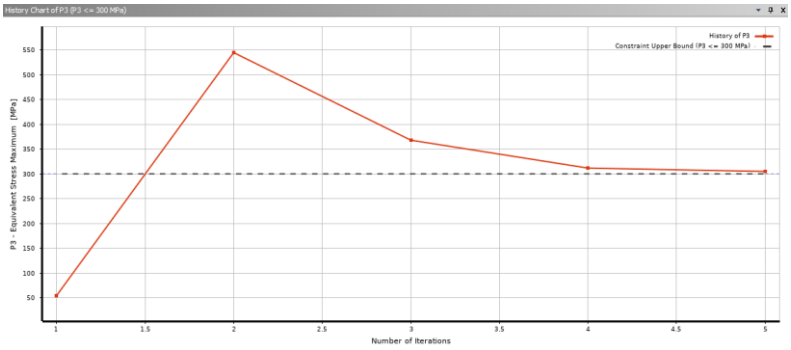



Рисунок 9.16 – Изменение ограничения по итерациям

Величина максимального напряжения составляет 304.87, что укладывается в заданную точность 10 МПа.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Оптимальное решение для данной задачи нетрудно найти аналитически. Для этого найдём потребную площади сечения как отношение силы к допускаемым напряжениям:

$$S = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{10000\,\text{Н}}{300\,\text{МПа}} = 33{,}33\,\text{мм}^2.$$

С учётом ширины пластины $b$ = 20 мм, получим значение толщины

$$t = \frac{S}{b} = \frac{33{,}33\,\text{мм}^2}{20\,\text{мм}} = 1{,}67\,\text{мм}.$$

Численное решение 1,79 мм отличается от аналитического 1,67 мм в большую сторону на 7% ввиду завышения максимальных напряжений в модели, обусловленного краевым эффектом заделки (рисунок 9.17).

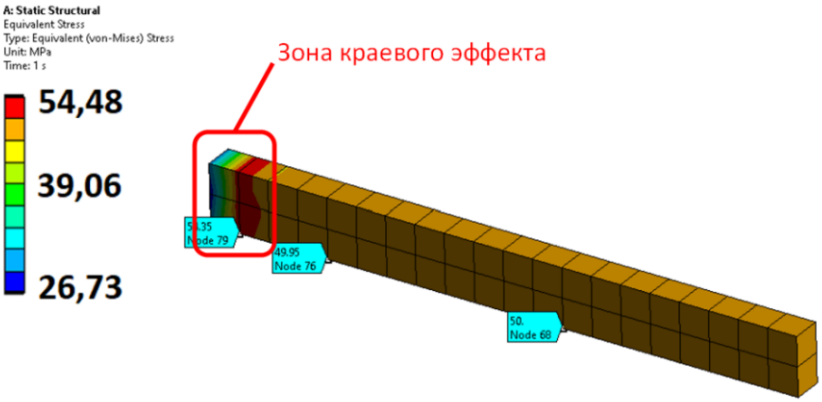



Рисунок 9.17 – Краевой эффект в заделке


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

### *Контрольные вопросы*

1. Что Вы понимаете под процессом параметрической оптимизации конструкций?
2. Сформулируйте задачу оптимизации общего вида.
3. Расскажите основную идею метода сканирования.
4. Расскажите основную идею метода *NLPQL*.
5. Расскажите основную идею метода *MISQP*.


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Болдырев, А.В. Автоматизация конструирования летательных аппаратов: электронное учебное пособие / А.В. Болдырев, В.А. Комаров // Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Самара, 2012.
2. LS-DYNA. Безэлементный метод Галеркина. – Официальный канал DYNAmore GmbH европейского мастер-дистрибьютора универсальной программы мультифизического моделирования LS-DYNA. – 10.08.2020 – URL: https://www.youtube.com/watch?v=BR9EsMlV_wc (дата обращения 31.03.2023).
3. Удар пули по стальной пластине в LS-DYNA. – BeenuZz, 07.10.2015. – https://www.youtube.com/watch?v=VZopWkFPnxA (дата обращения 31.03.2023).
4. Argyris, J.H. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations / J.H. Argyris / – Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vol. 26 No. 11, 1954. – pp. 383–394. https://doi.org/10.1108/eb032491.
5. Комаров, В.А. Автоматизация проектирования авиационных конструкций: учебное пособие / В.А. Комаров // Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, 1993. – 72 с.
6. Eigen - библиотека шаблонов C++ для линейной алгебры: матрицы, векторы, численные решатели и связанные с ними алгоритмы. – URL: https://eigen.tuxfamily.org/ (дата обращения 07.04.2023).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

7. Березин, Т.С. Методы вычислений / Т.С. Березин, Н.П. Жидков. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, Т.1, 1962. – 464 с.
8. Образцов, И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учебное пособие / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. – Москва: Высшая школа, 1985. – 392 с.
9. Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование: учебное пособие / Н.Н. Голованов. – Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2016. – 400 с.
10. Catmull, E. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes / E. Catmull, J. Clark // Computer Aided Design, Vol. 10, No. 6, 1978. – pp. 350–355.
11. Dacampo-Sanchez, J. A regularization approach for automatic quad mesh generation / J. Dacampo-Sanchez, R. Haimes // Aerospace Computational Design Laboratory, Department of Aeronautics & Astronautics, Massachusetts Institute of Technology. – 12 p. (URL: https://acdl.mit.edu/esp/Publications/IMR28.pdf).
12. Работнов, Ю.Н. Сопротивление материалов / Ю.Н. Работнов. – Москва: Физматгиз, 1962. – 456 с.
13. Британская компания GKN Aerospace создает композитную конструкцию крыла с использованием новых процессов и технологий / URL: https://www.aerospace-technology.com/uncategorised/newsuks-gkn-aerospace-creates-composite-wing-structure-using-new-processes-technologies/ (дата обращения 24.04.2023).
14. Испытание на механическую прочность: Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ) проведет испытания уникальной конструкции композитного кессона киля самолета МС-21-300 / Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского. Официальный сайт. – URL: http://www.tsagi.ru/en/pressroom/archive/2014/1565/ (дата обращения 24.04.2023).


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

15. Jones, Robert M. Mechanics of composite materials / Robert M. Jones // 2nd edition, Taylor & Francis, 1998. – 519 p.
16. Bendsoe, M.P. Optimal shape design as a material distribution problem / M.P. Bendsoe // Structural optimization, Iss. 1, 1989. – pp. 193–202.
17. Комаров, А.А. Основы проектирования силовых конструкций / А.А. Комаров // Куйбышевское книжное издательство, 1965. – 88 с.
18. Комаров, В.А. Проектирование силовых схем авиационных конструкций / В.А. Комаров // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. – Москва: Машиностроение, 1984. – С. 114–129.
19. Структура SIMULIA TOSCA. 8.1 Оптимизация структуры. – URL: https://www.simulia.cz/download/204 (дата обращения 04.05.2023).
20. Программный комплекс IOSO NM. – URL: http://www.iosotech.com/ru/ioso_nm.htm (дата обращения 11.05.2023)


Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm

https://право.информ2000.рф/index.htm
Бесплатная электронная библиотека по праву и экономике

Учебное издание

***Куркин Евгений Игоревич,***
***Кишов Евгений Алексеевич***

# АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Учебное пособие*

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 08.11.2023. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 8,0.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

---

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Вернуться в каталог книг по воздушному транспорту
https://право.информ2000.рф/tta/tta.htm